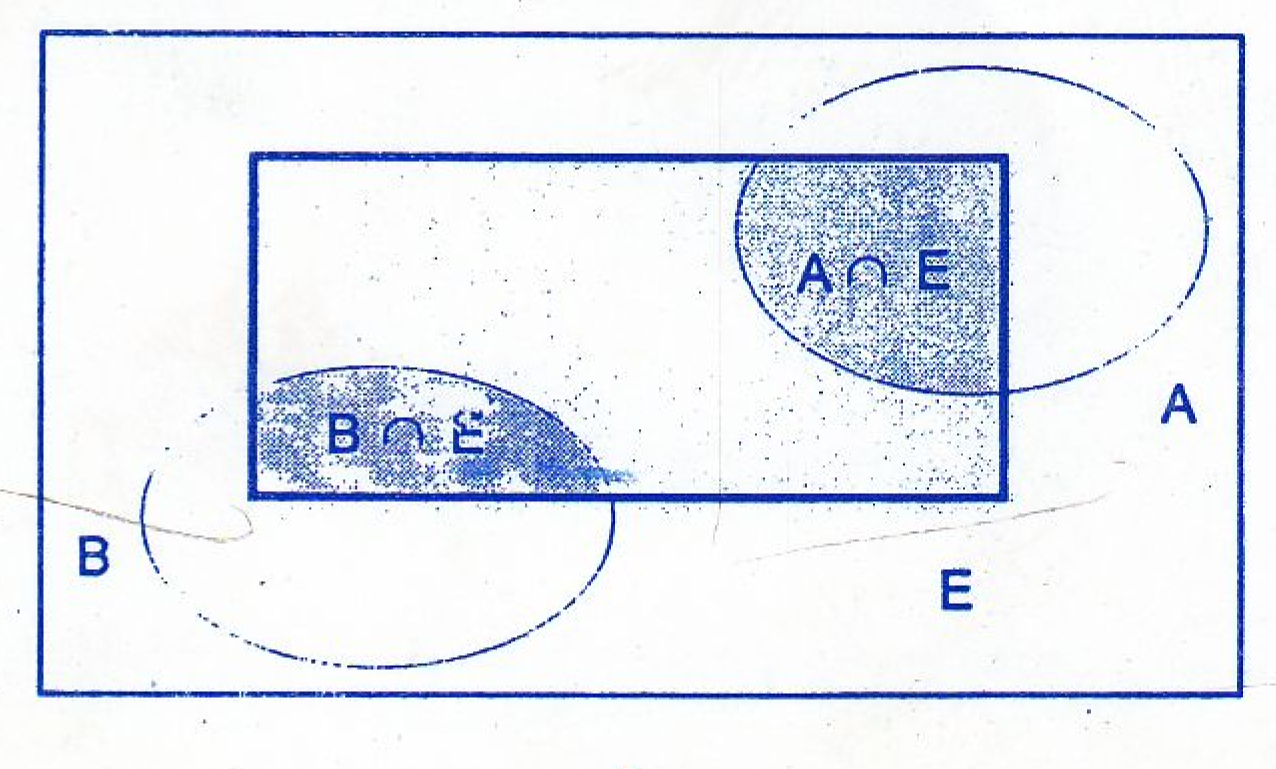
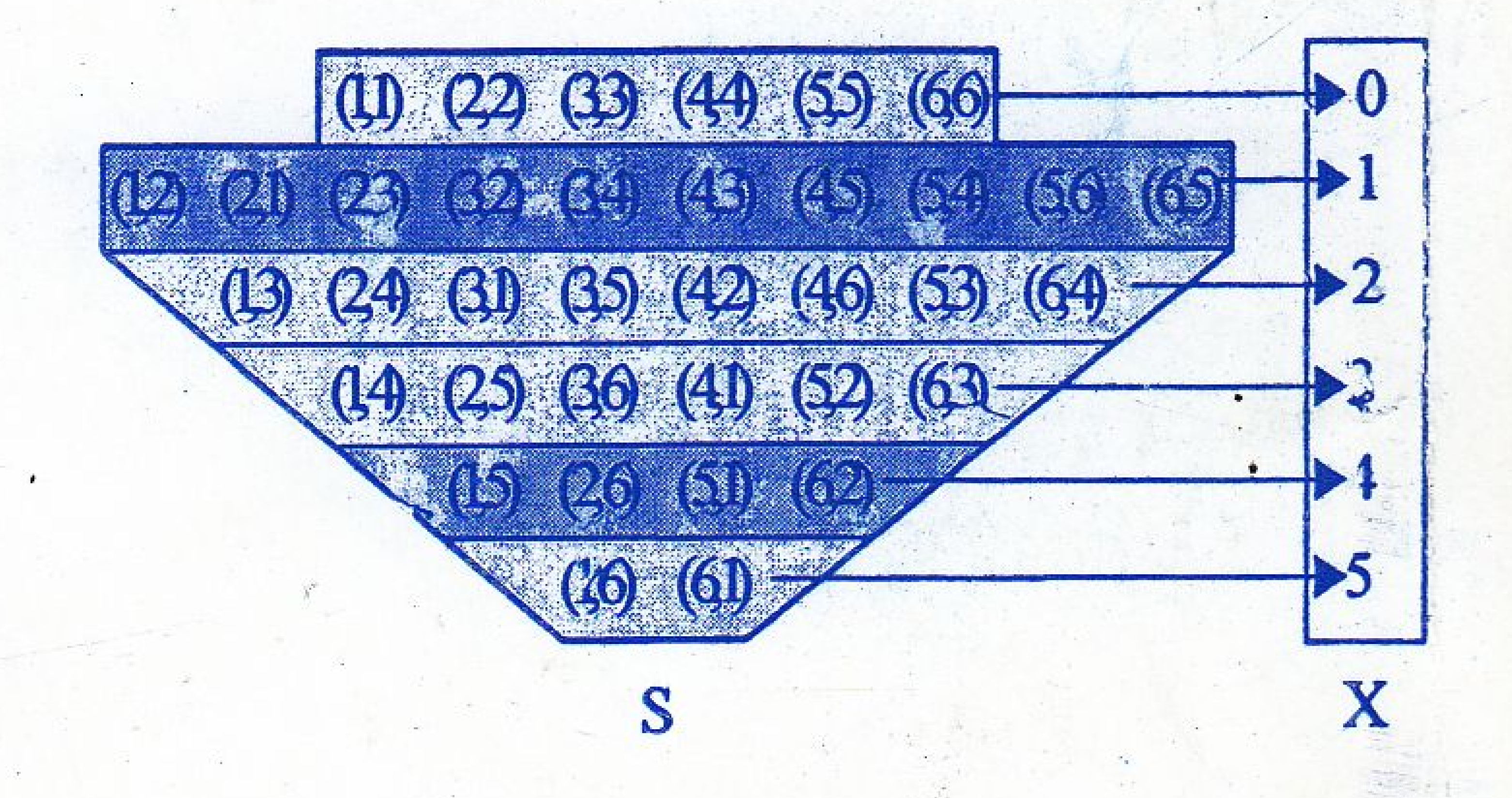
دروس فى

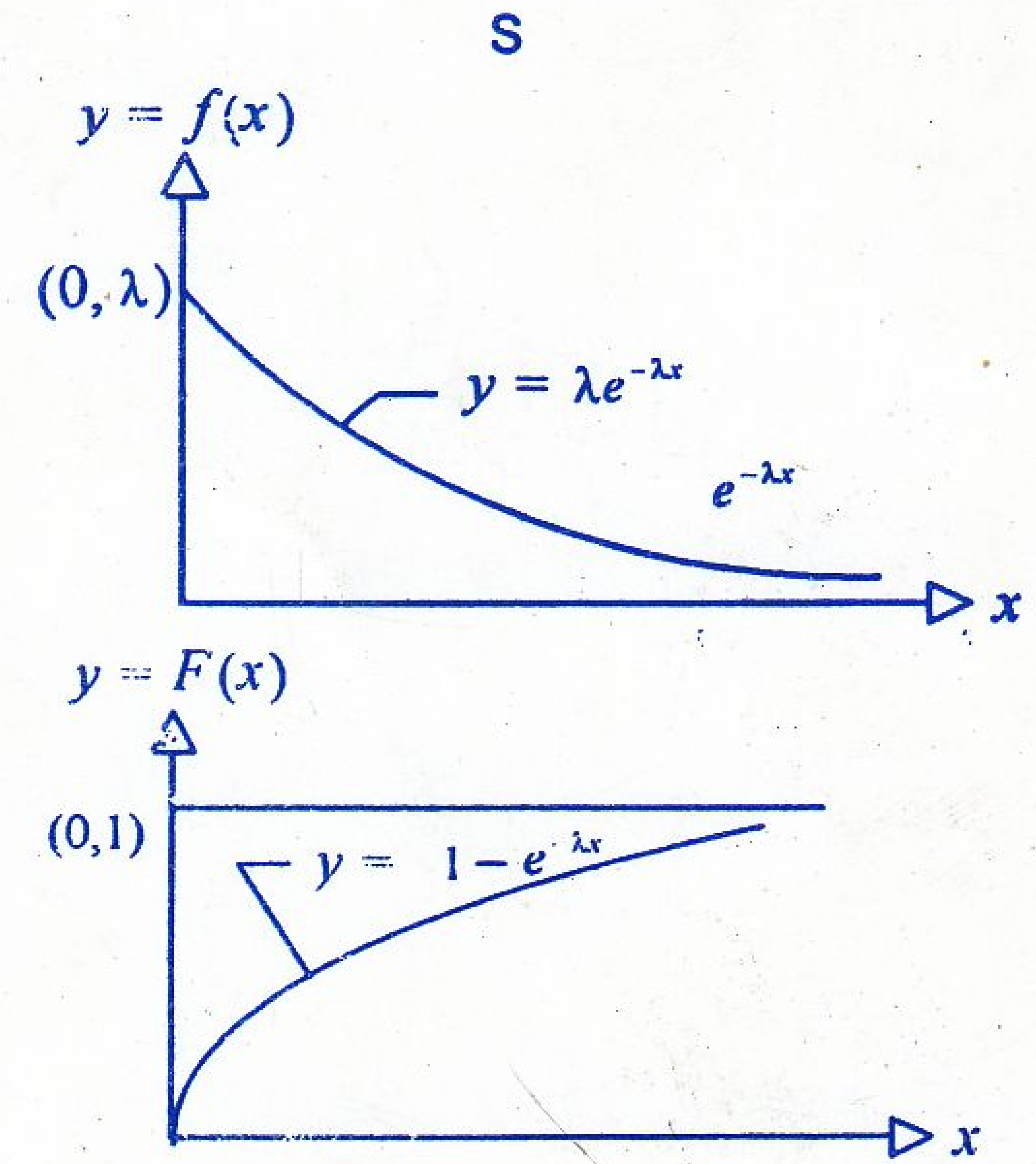
نظرية الإحتمالات وتطبيقاتها

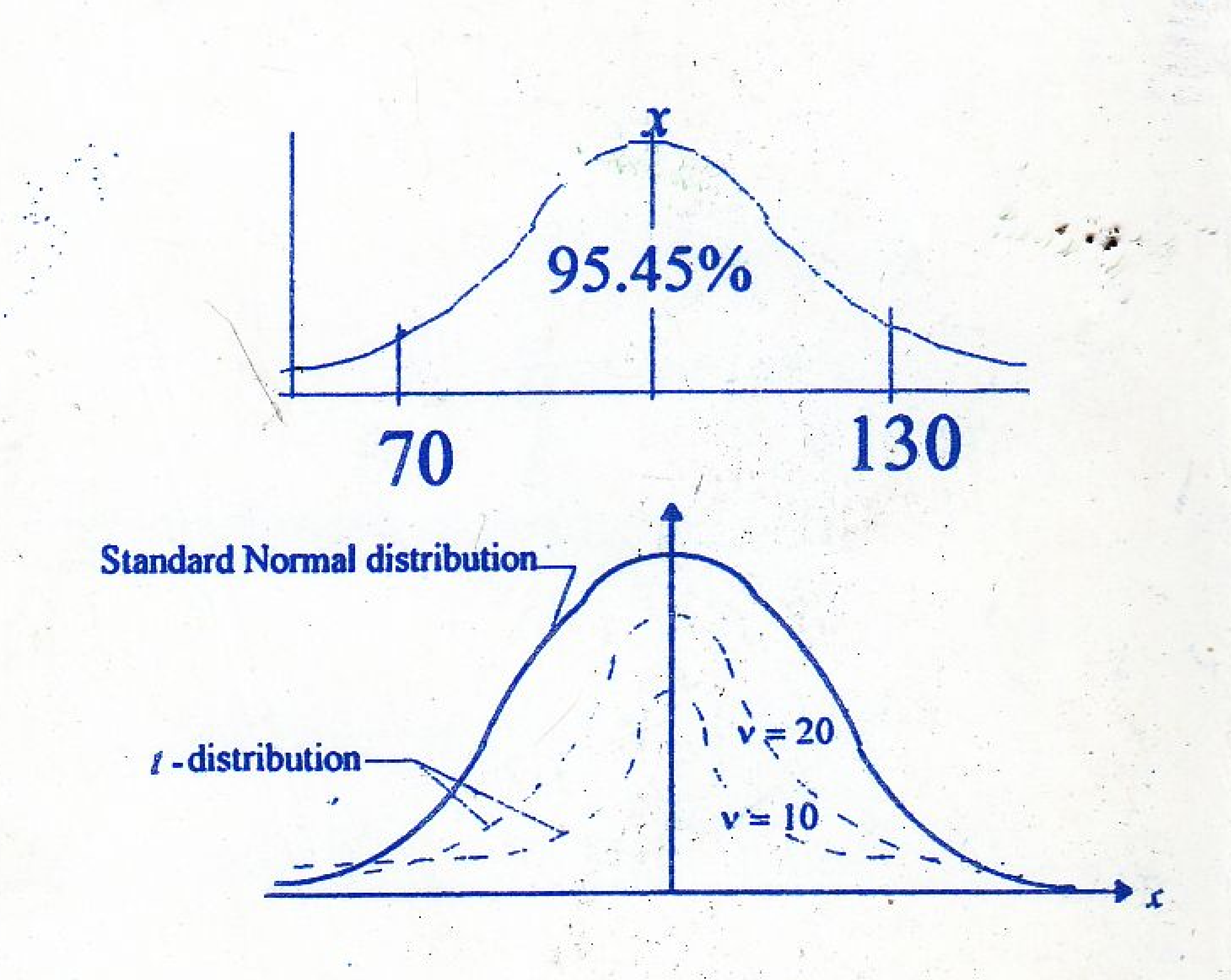
إعداد

أ.د. على نصر السيد الوكيل









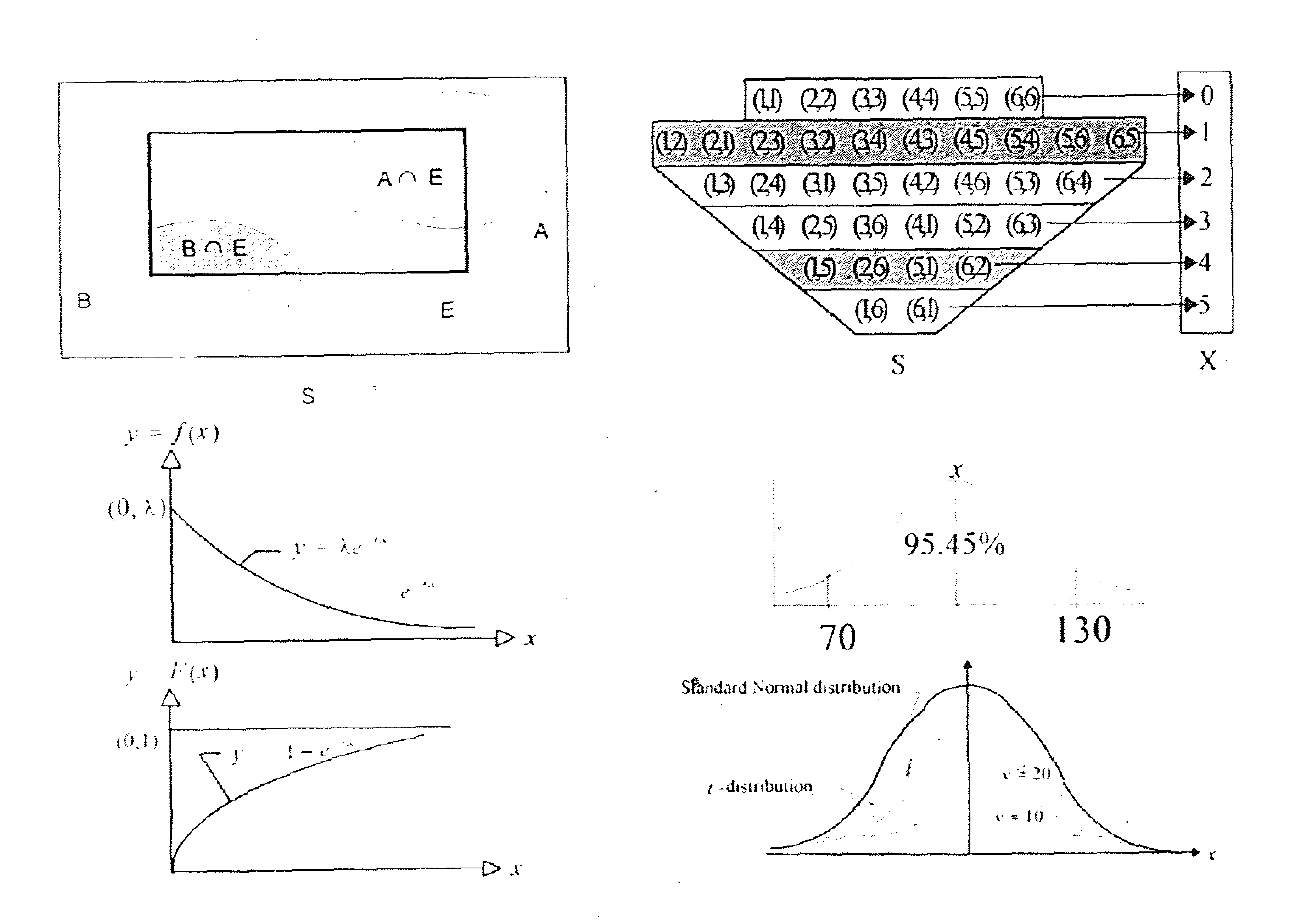
٢٠١١

دروس فى

نظرية الإحتمالات وتطبيقاها

إعداد

أ.د. على نصر السيد الوكيل



٢٠١١

رقــم الإيــداع

١٩٠١٠ / ٢٠١٠

دار المصطفى للطباعة

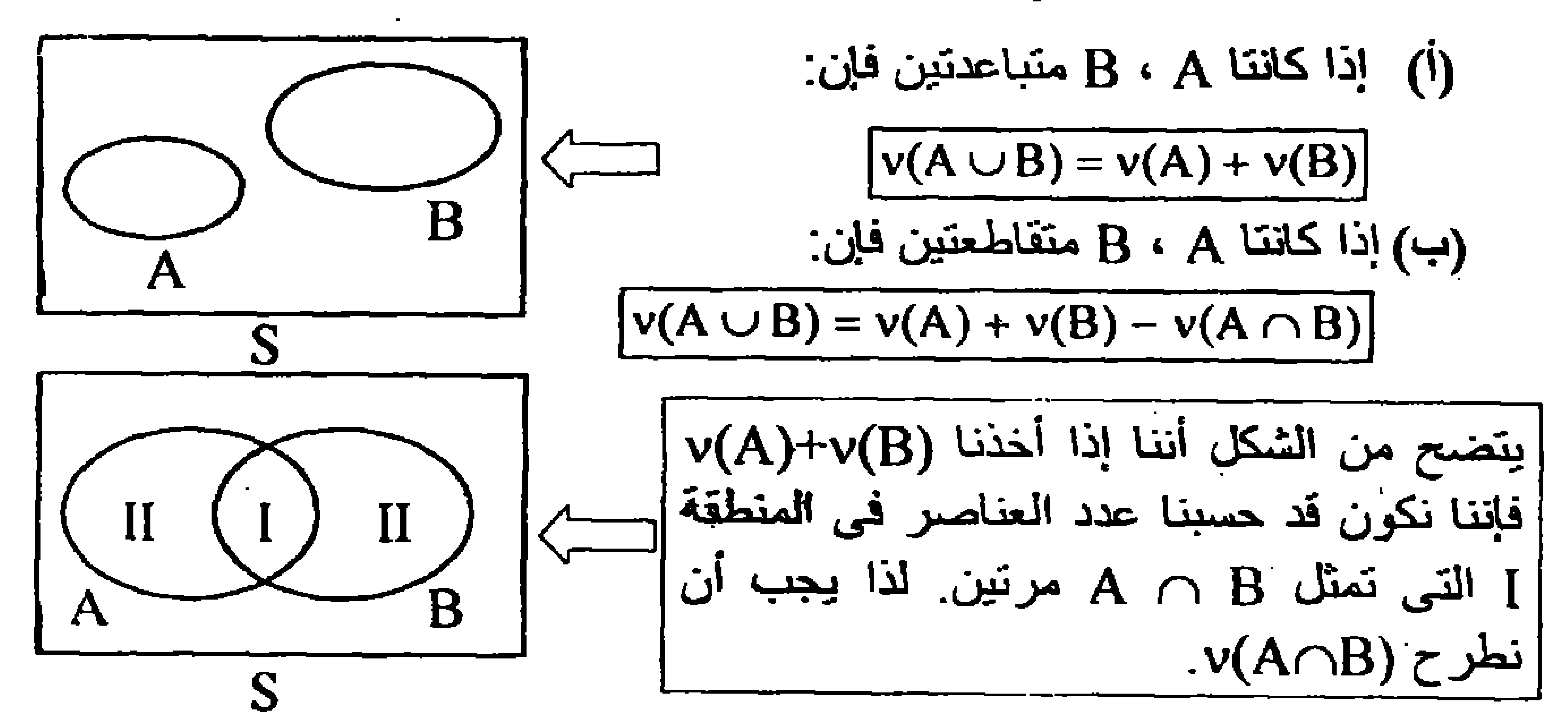
بنها الجديدة ت: ٠١٣/٢٢٢٨٣٦٠

الدرس الأول

طرق العد COUNTING TECHNIQUES

١-١ عدد عناصر مجموعة Number of Elements in a Set

إذا كانت المجموعة A تحتوى عددا محدودا من العناصر فإن عدد هذه العناصر يرمز له بالرمز $v(A)$ ؛ وتوجد قواعد تساعد فى معرفة عدد عناصر المجموعات المركبة وهى:



(أ) إذا كانتا A ، B متباعدتين فإن:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

(ب) إذا كانتا A ، B متقاطعتين فإن:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$$

يتضح من الشكل أننا إذا أخذنا $v(A)+v(B)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر فى المنطقة I التى تمثل $A \cap B$ مرتين. لذا يجب أن نطرح $v(A \cap B)$.

مثال(١)

لدينا فصل من الطلاب منهم ٣٠ يدرسون اللغة الانجليزية كلغة أجنبية أولى ، ١٢ يدرسون اللغه الفرنسية كلغه أجنبيه أولى. كم طالبا فى هذا الفصل إذا علمت أن اللغات الأجنبية الأولى المتاحة فى المدرسة هى الإنجليزية والفرنسية فقط، وأن كل طالب يدرس لغة أجنبية واحدة؟

الحـــل:

لتكن E هى مجموعة الطلاب الذين يدرسون الانجليزية كلغة أجنبية أولى، F مجموعة الطلاب الذين يدرسون الفرنسية كلغة اجنبية أولى. إذن:

$$v(F) = 12 \text{ ، } v(E) = 30$$

وحيث أن $E \cap F = \phi$ ، إذن عدد طلاب الفصل هو:

$$v(E \cup F) = v(E) + v(\Phi) = 30 + 12 = 42$$

مثال (٢)

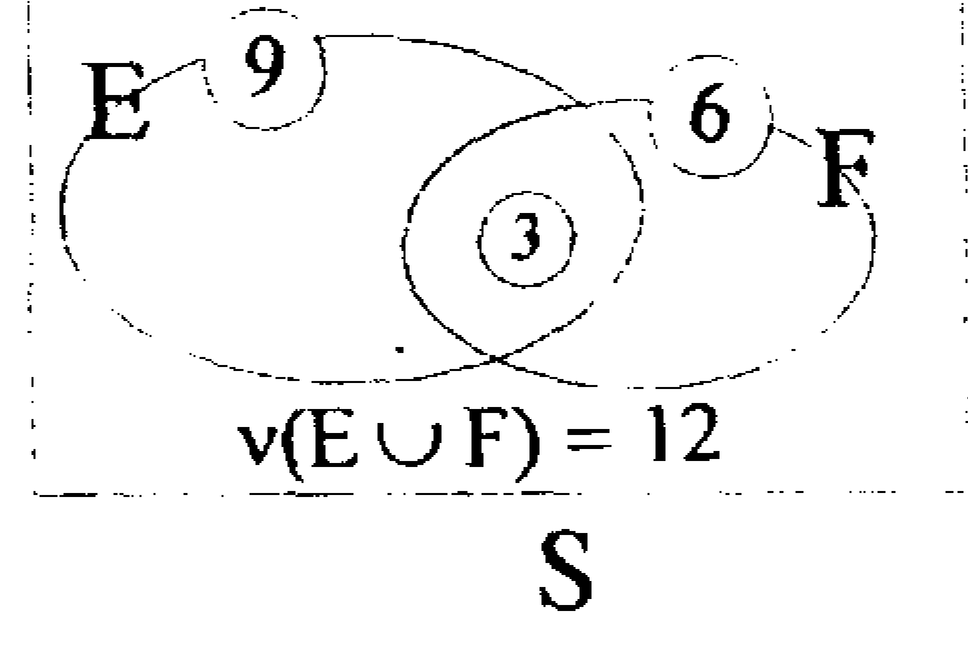
في مجموعة للترجمة وجد أن عدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية على الأقل يساوي ٩، وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية على الأقل يساوى 6. فإذا كان العدد الكلى للمترجمين يساوى 12، أوجد عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا وعدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية فقط وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية فقط.

الحـــل

لتكن E مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الانجليزية ، F مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية . إذن عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا هو:

$$\nu(E \cap F) = \nu(E) + \nu(F) - \nu(E \cup F) = 9 + 6 - 12 = 3$$

الشكل الآتى يوضح المسألة: ⇦



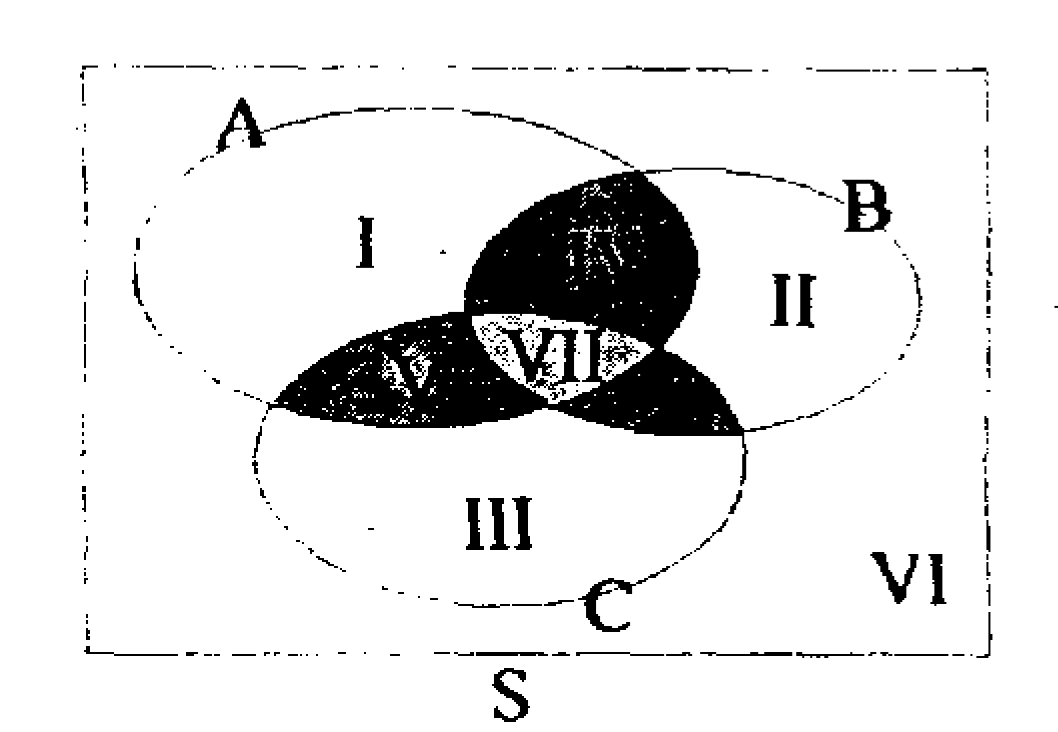
من الشكل ينتج أن:

عدد المترجمين للغة الانجليزية فقط يساوى٦ ،

عدد المترجمين للغة الفرنسية فقط يساوى٣ .

(ج) إذا كانت A ، B ، C متقاطعة فإن:

$$\nu(A \cup B \cup C) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(A \cap B) - \nu(A \cap C) - \nu(B \cap C) + \nu(A \cap B \cap C)$$



توضيح

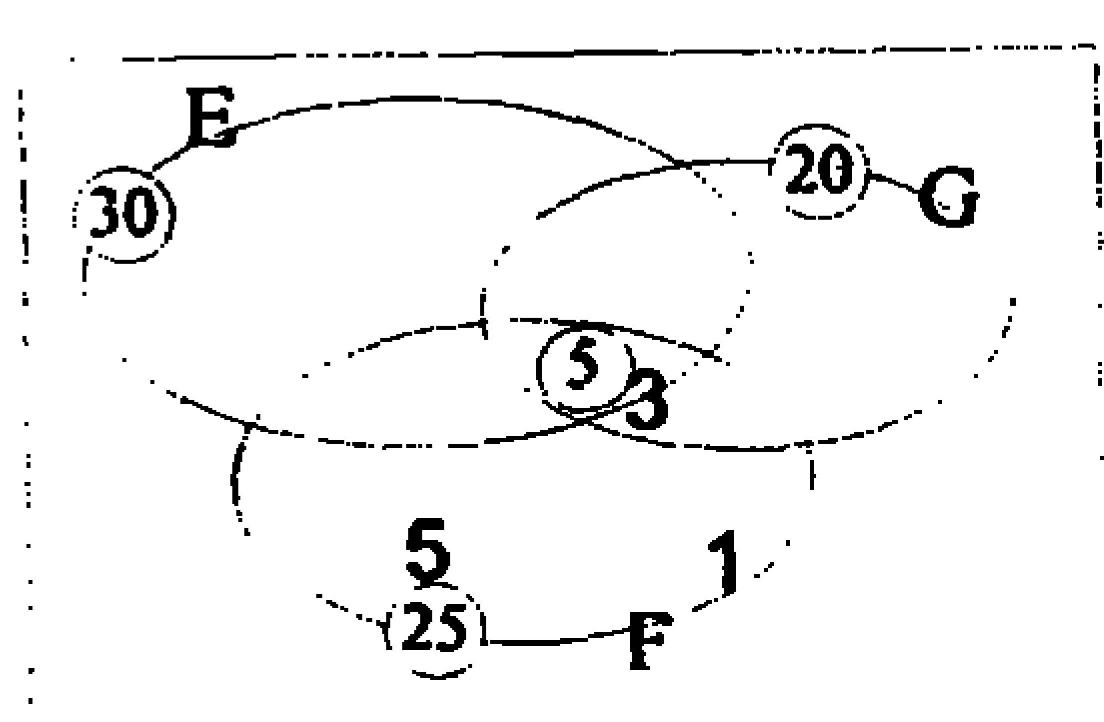
الطرف الأيسر تمثله المنطقة الملونة فى الشكل. والجدول الآتى يبين ذلك.

ν(A)	=	ν(I)			+ ν(IV)	+ ν(V)		+ ν(VII)
ν(B)	=		ν(II)		+ ν(IV)		+ ν(VI)	+ ν(VII)
ν(C)	=			ν(III)		+ ν(V)	+ ν(VI)	+ ν(VII)
− ν(A ∩ B)	=				− ν(IV)			− ν(VII)
− ν(B ∩ C)	=						− ν(VI)	− ν(VII)
− ν(A ∩ C)	=					− ν(V)		− ν(VII)
+ν(C ∩ B ∩ A)	=							+ ν(VII)
R.H.S.	=	ν(I)	+ν(II)	+ν(III)	+ ν(IV)	+ ν(V)	+ ν(VI)	+ ν(VII)

مثال

فى مكتب للترجمة وجد أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل يساوى 30، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل يساوى 20، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل يساوى 25. فإذا علمت أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والألمانية على الأقل يساوى 8، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية على الأقل يساوى 6، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية على الأقل يساوى 10، عدد الذين يجيدون الترجمة للغات الثلاث يساوى 5؛ فما هو العدد الكلى للمترجمين ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة؟

الحل

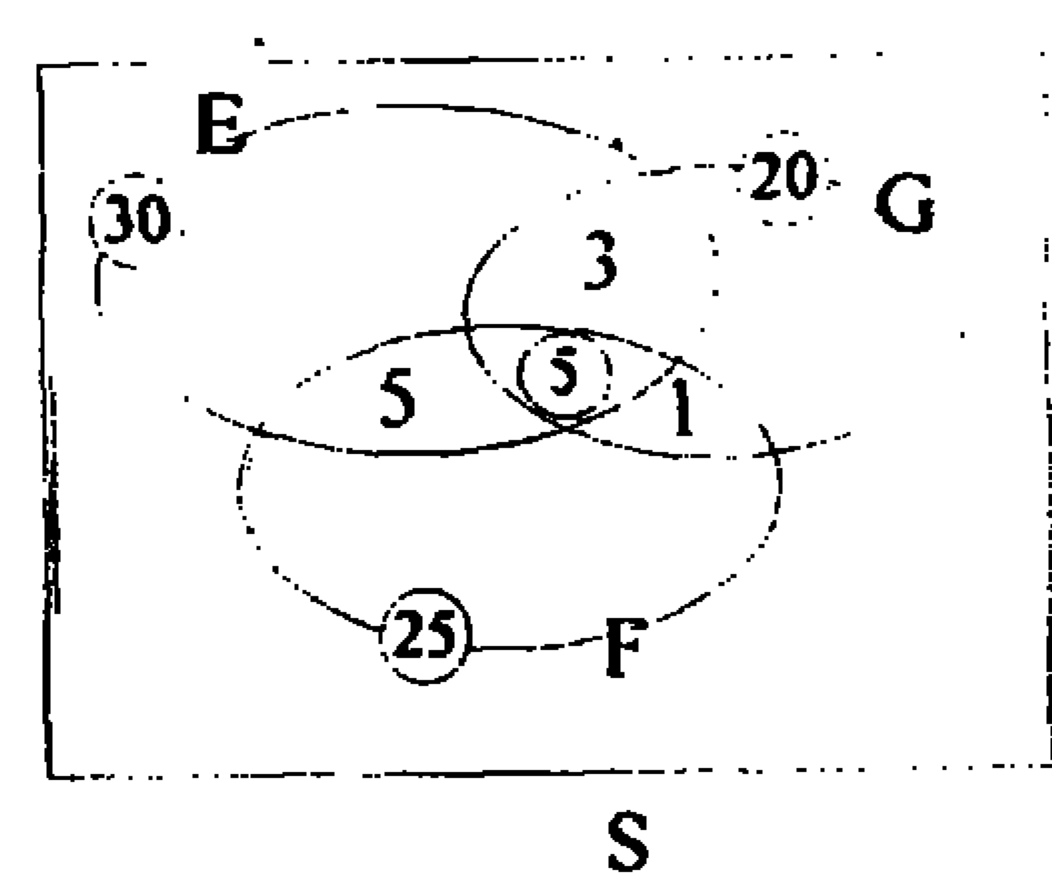


نفرض أن مجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل هى E ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل هى G ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل هى F. ⇦

S

واضح من الشكل أن عدد الذين يترجمون للإنجليزية والألمانية دون الفرنسية يساوى 5 − 8 أى 3، وعدد الذين يترجمون للألمانية والفرنسية دون الإنجليزية يساوى 5 − 6 أى 1 وعدد الذين يترجمون للإنجليزية والفرنسية دون الألمانية يساوى 5 − 10 أى 5

إذن نعدل الشكل إلى: ⇦



إذن عدد الذين يجيدون الترجمة إلى لغتين دون الثالثة يساوى:

$$\boxed{3+1+5=9}$$

إذن:

عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية فقط يساوى 5− 5 − 3 − 30 . أى 17

، عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية فقط يساوى 5− 1 −3 − 20 . أى 11

، عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية فقط يساوى 5− 1− 5 − 25. أى 14

إذن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط يساوى :

$$\boxed{17+11+14=42}$$

، العدد الكلى للمترجمين يساوى:

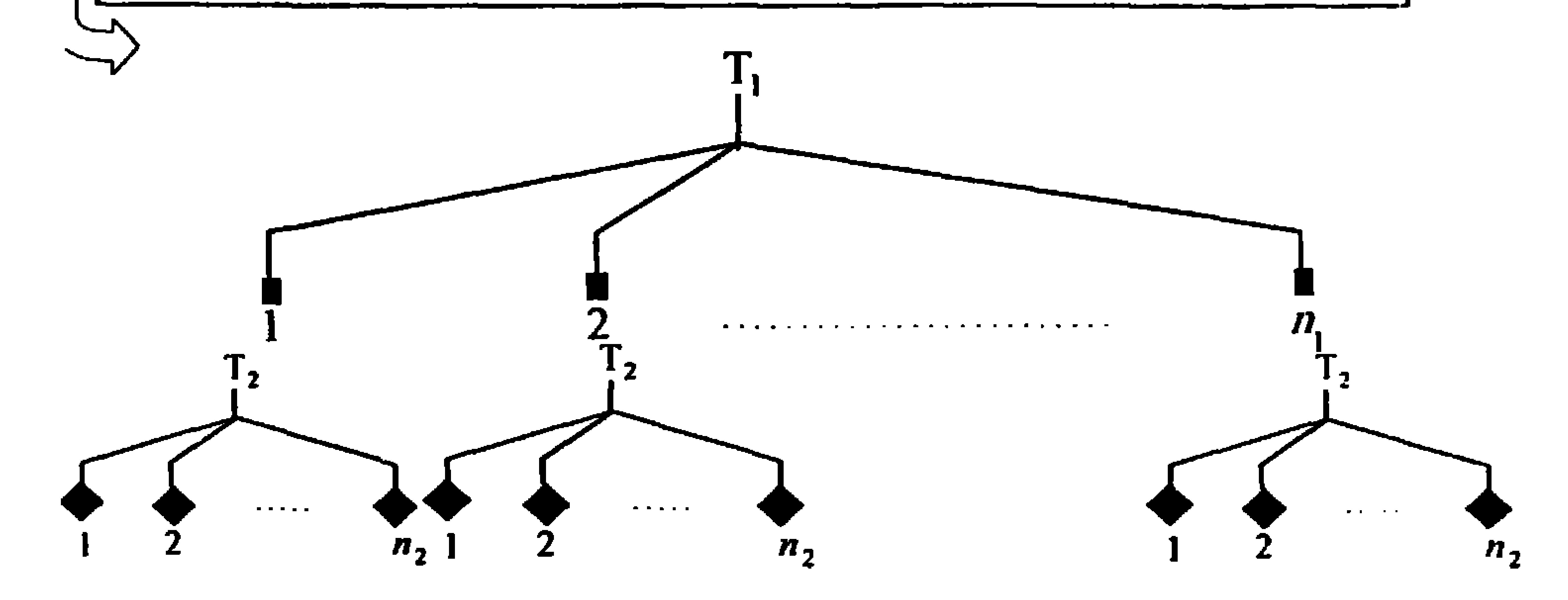
$$\boxed{42+9+5=56}$$

أو بتطبيق القاعدة مباشرة يساوى:

$$\boxed{30+20+25-8-6-10+5=56}$$

٢-١ مبدأ العد Counting Principle

لنفرض أننا نريد إجراء عمليتين T_1، T_2 على التوالى، ولنفرض أن العملية T_1 يمكن إجراؤها بطرق عددها n_1 وأن العملية T_2 يمكن إجراؤها بطرق عددها n_2؛ فإن العملية T_1T_2 (أى T_1، T_2 على التوالى) يمكن إجراؤها بطرق عددها n_1n_2.



مثال(١)

كم عددا مكونا من رقمين (آحاد وعشرات)؟

الحـــل

رقم الآحاد يمكن اختياره من بين عشرة أرقام 0، 1، 2، ... ، 9. أما رقم العشرات فيتم اختياره من بين تسعة أرقام فقط 1، 2، ... ، 9. إذن يوجد $10 \times 9 = 90$ عدد مكون من رقمين.

مثال (٢)

يراد إعطاء أسماء لملفات برنامج للكمبيوتر بحيث يكون الإسم مكونا من حرف من الحروف الهجائية اللاتينية متبوعا برقم من 1 إلى 9. كم ملفا يمكن تسميته بهذه الطريقة؟

الحـــل

الشق الأول من الإسم يمكن كتابته بطرق عددها 26 وهو عدد الحروف اللاتينية، والشق الثانى يمكن كتابته بطرق عددها 9. إذن عدد الملفات التى يمكن تسميتها بهذه الطريقة يساوى $26 \times 9 = 234$.

مثال (٣)

لمحطة سكة حديد خمسة أبواب. بكم طريقة يمكن لشخص الدخول ثم الخروج من باب غير الذى دخل منه؟

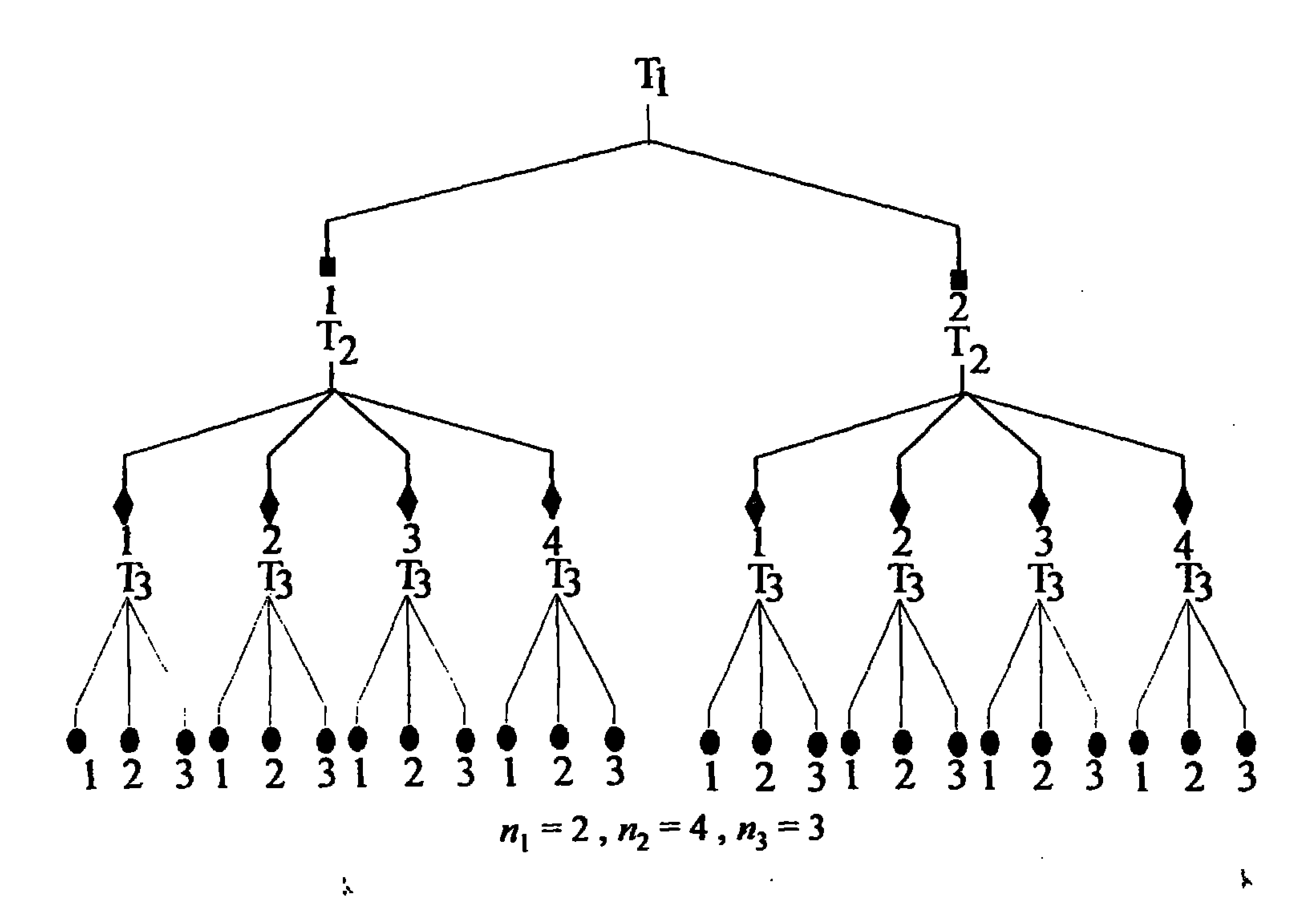
الحـــــل

عدد طرق الدخول 5 ، وكل منها تقترن بأربعة طرق للخروج. إذن عدد طرق الدخول والخروج معا يساوى 54 أى 20.

١-٣ المبدأ العام للعد Extended Counting Principle

ينص المبدأ العام للعد على الآتى:

> لنفرض عمليات T_1، T_2 ، ... ، T_m يمكن إجراؤها بطرق عددها n_1، n_2، ... ، n_m على الترتيب. فإن العملية المركّبة $T_1T_2 \dots T_m$ يمكن إجراؤها بطرق عددها $n_1n_2 \dots n_m$.



$n_1 = 2 , n_2 = 4 , n_3 = 3$

مثال

يراد إعطاء أسماء لملفات برنامج للكمبيوتر بحيث يكون الاسم مكونا من حرفين من الحروف الهجائية اللاتينية متبوعا بثلاثة أرقام من 1 إلى 9. كم ملفا يمكن تسميته بهذه الطريقة؟

الحل

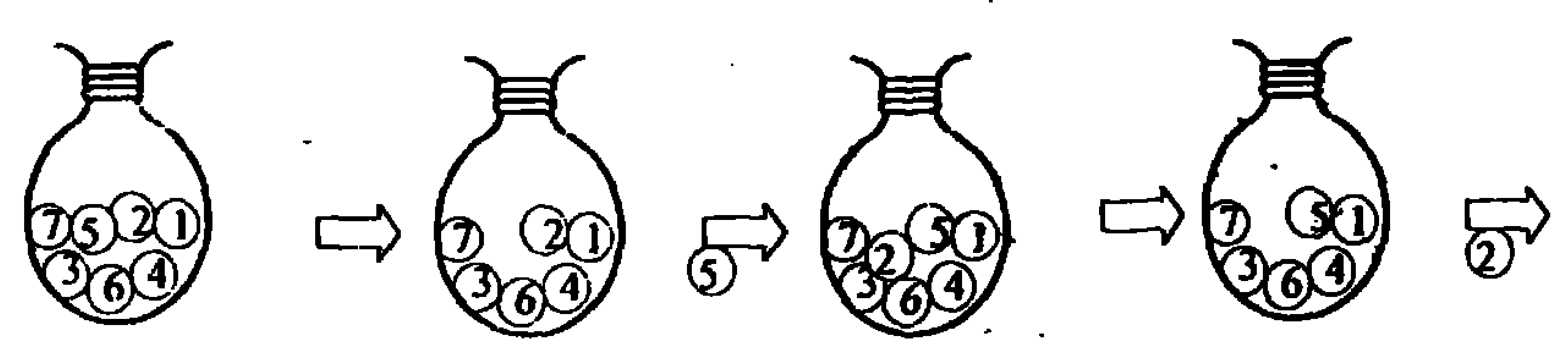
الحرف الأول من الشق الأول من الاسم يمكن كتابته بطرق عددها 26 وهو عدد الحروف اللاتينية، والحرف الثانى من الشق الأول من الاسم يمكن كتابته بطرق عددها 26. أما الشق الثانى من الاسم فيمكن كتابته بطرق عددها $9\times9\times9$. إذن عدد الملفات التى يمكن تسميتها بهذه الطريقة يساوى $(26)^2(9)^3$ أى 18252.

١-٤ التباديل والتوافيق Permutations and Combinations

لنفرض أننا لدينا n من الأشياء (العناصر) ونريد اختيار r منها. نستطيع أن نمثل عملية الاختيار بوضع n من الكرات المرقمة داخل كيس وسحب كرة من الكيس r من المرات. توجد طريقتان لهذا الاختيار:

١-٤-١ السحب مع الإحلال Selection with replacement

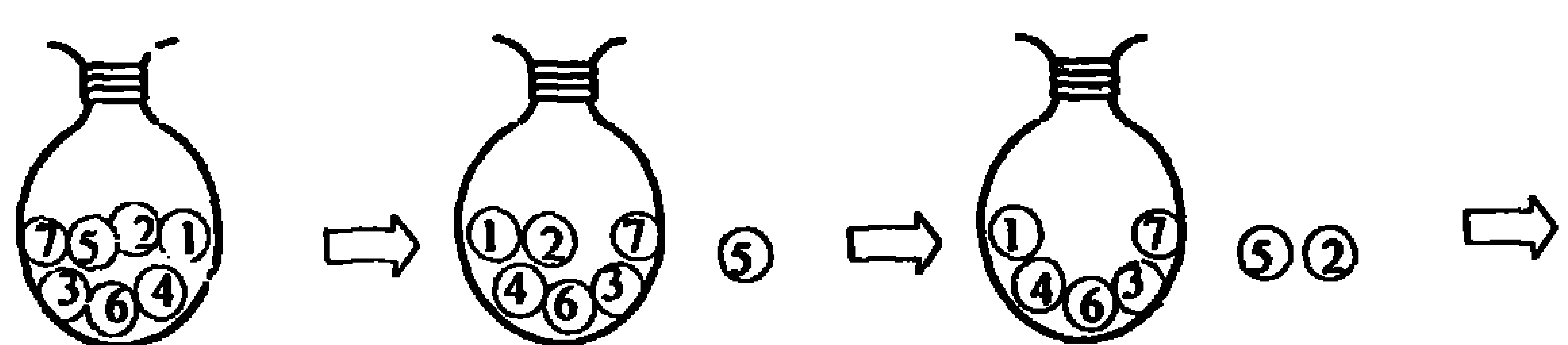
فى هذه الطريقة نختار عنصرا من العناصر، ونسجل هذا العنصر، ثم نعيد هذا العنصر مرة ثانية إلى المجموعة، ثم نكرر هذه العملية r من المرات.



عدد طرق الاختيار مع الإحلال يساوى (r من المرات) أى يساوى n^r .

١-٤-٢ السحب بدون إحلال Selection without replacement

نختار عنصرا من العناصر، ونسجل هذا العنصر، ثم نكرر هذه العملية r من المرات بدون إعادة العناصر إلى المجموعة.



فى هذه الطريقة فإن السحبة الأولى تتم بطرق عددها n. وحيث أننا لانعيد الكرة ثانية إلى الكيس فإن السحبة الثانية تتم بطرق عددها $n-1$ ، والسحبة الثالثة تتم بطرق عددها $n-2$ ...وهكذا إلى أن نصل إلى السحبة رقم r فتتم بطرق عددها $n-r+1$.

إذن فإن عدد طرق الاختيار بدون إحلال يساوى . ويسمى هذا العدد تبديل n من العناصر r من المرات، ويرمز له بالرمز ^nP_r. أى أن:

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

وإذا كان $r = n$ فإننا نحصل على:

$$^nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

وهذا العدد يسمى مضروب n ويرمز له بالرمز $n!$. أى أن:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$$

هذا، ومن السهل استنتاج العلاقة:

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال(١)

بكم طريقة يمكن اختيار أربعة أوراق متتالية من أوراق الكوتشينة:

(أ) مع الإحلال؟ (ب) بدون إحلال؟

الحـــــل

(أ) عدد الطرق مع الإحلال يساوى $(52)^4$ أى 7311616.

(ب) عدد الطرق بدون إحلال يساوى $^{52}P_4$ أى $52\times 51\times 50\times 49$ أ ى6497400.

[لاحظ أن الاختيار ⚀ ⚂ ⚁ ⚅ مثلا يختلف عن الاختيار ⚅ ⚂ ⚁ ⚀].

مثال (٢)

إذا رمى زهر طاولة أربع مرات وسجلت النتائج فى متتابعة، فكم متتابعة تتكون بهذه الطريقة؟

الحـــــل

عدد المتتابعات يساوى 6^4 أى 1296.

مثال (٣)

إذا رمى زهرا طاولة متماثلان، فكم نتيجة مختلفة نحصل عليها؟

الحـــل

حيث أن الزهرين متماثلان، فإننا لا نستطيع التمييز بين الرمية والرمية مثلا. لذا تجب القسمة على عدد طرق ترتيب الزهرين فيما بينهما. أى على $2!$ أى على 2. إذن عدد النتائج المختلفة يساوى:

$$\frac{{}^{6}P_{2}}{2!}=\frac{6\times 5}{1\times 2}=15$$

وبوجه عام فإن عدد طرق اختيار r من العناصر من n منها بدون ترتيب يسمى توفيق r من العناصر من n منها ويرمز له بالرمز ${}^{n}C_{r}$ حيث:

$$\boxed{{}^{n}C_{r}=\frac{1}{r!}{}^{n}P_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

مثال (٤)

بكم طريقة يمكن اختيار أربع من أوراق الكوتشينة إذا كان ترتيب الأوراق فيما بينها غير مطلوب؟

الحـــل

عدد الطرق يساوى

$${}^{52}C_{4}=\frac{52\times 51\times 50\times 49}{1\times 2\times 3\times 4}=2{,}598{,}960$$

مثال (٥)

كيس يحتوى على ثمان كرات حمراء وسبع كرات سوداء. بكم طريقة يمكننا اختيار خمس كرات من الكيس فى الحالات الآتية:

(أ) كل الكرات حمراء.

(ب) كل الكرات سوداء .

(ج) كرتان حمراوان وثلاث سوداء .

(د) ثلاث كرات حمراء واثنتان سوداوان .

الحـــل

(أ) عدد الطرق يساوى ${}^{8}C_{5}$ أى 56.

(ب) عدد الطرق يساوى ${}^{7}C_{5}$ أى 21.

(ج) عدد الطرق يساوى ${}^{8}C_{2}\times{}^{7}C_{3}$ أى 28×35 أى 980.

(د) عدد الطرق يساوى ${}^{7}C_{2}\times{}^{8}C_{3}$ أى 21×56 أى 1,176.

مثال (٦)

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة من خمسة أعضاء ثم رئيس لهم من مجموعة من خمس عشرة فردا؟

الحـــــل

عدد طرق اختيار اللجنة (بدون تحديد الرئيس) يساوى $^{15}C_6$ أى 5,005.

عدد طرق اختيار رئيس للجنة يساوى $^{6}C_1$ أى 6.

إذن عدد طرق اختيار اللجنة يساوى $^{15}C_6 \times {}^{6}C_1$ أى 5005×6 أى 30,030.

ملاحظات

(أ) يمكن استنتاج الخاصتين الآتيتين بكل سهولة:

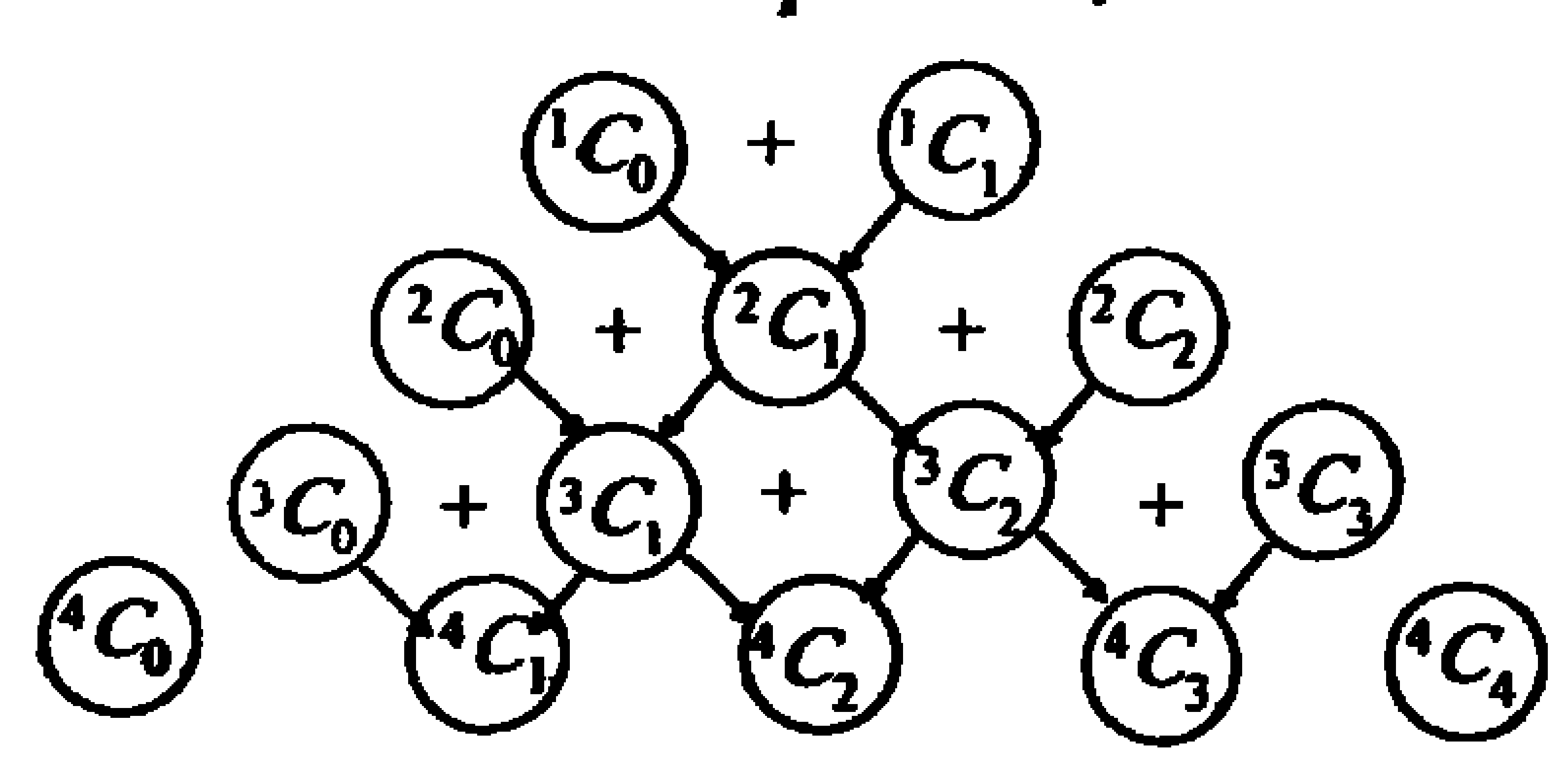
$$^{n}C_{n-r} = {}^{n}C_r \quad , \quad ^{n}C_r + {}^{n}C_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1}$$

والخاصية الأولى تفيد عندما تكون قيمة r قريبة من قيمة n فمثلا:

$$^{15}C_{12} = {}^{15}C_3 \quad , \quad ^{n}C_n = {}^{n}C_0 = 1 \quad , \quad ^{n}C_{n-1} = {}^{n}C_1 = n$$

أما الخاصية الثانية فتقود إلى نتيجة طريفة تسهل علينا حساب القيم الأولى للتوافيق وهى المعروفة باسم مثلث باسكال ***Pascal's triangle*** نسبة إلى العالم الرياضى باسكال:

1



وهذا يعطى معاملات مفكوك ذى الحدين:

$$(a+b)^n = {}^{n}C_0 a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} b + \cdots + {}^{n}C_n b^n$$

كالآتى:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

....

ويبين الشكل الآتى معاملات ذى الحدين:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

تمريـــــن ١

١. عشرون مريضا ظهرت عليهم أعراض المرض x ، ثلاثون ظهرت عليهم أعراض المرض y ، خمسة ظهرت عليهم أعراض كلا المرضين. أوجد عدد المرضى.

٢. فى حفل استقبال لمائة شخص وجد أن:

10 شربوا عصير البرتقال فقط، 30 شربوا عصير الليمون فقط، 15 شربوا مياه غازية فقط، 8 شربوا عصير البرتقال وعصير الليمون، 5 شربوا عصير البرتقال ومياه غازية، ٦ شربوا عصير الليمون ومياه غازية، ٤ شربوا الأنواع الثلاثة. بفرض أن الشارب لا يكرر الشرب من نوع واحد أوجد:

(أ) عدد كؤوس عصير البرتقال. (ب) عدد كؤوس عصير الليمون.

(ج) عدد زجاجات المياه الغازية. (د) عدد الذين لم يتناولوا أى مشروبات.

- فى عينة مكونة من 57 طالبا وجد أن 36 طالب يلعبون كرة القدم، 30 يلعبون كرة السلة، 25 يلعبون التنس، 6 طلاب يلعبون الثلاثة ألعاب. فإذا كان عدد الطلبة الذين يلعبون كرة القدم والسلة يساوى عدد الطلبة الذين يلعبون القدم والتنس، عدد الطلبة الذين يلعبون السلة والتنس يساوى نصف عدد الطلبة الذين يلعبون كره القدم والسلة أوجد:
   (أ) عدد الطلاب الذين يلعبون لعبه واحده فقط.
   (ب) عدد الطلاب الذين يلعبون لعبتين فقط.
- نسخة من جريدة "الجمهورية". أجرِىَ إحصاء عن موظفى الدائرة فوجد أن 20 موظفا يقرأون "الأهرام" فقط، 18 موظفا يقرأون "الأخبار" فقط، 15موظفا يقرأون "الجمهورية" فقط، 6 موظفين يقرأون الصحف الثلاث. أوجد عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة وعدد موظفى الدائرة.
- ألقيت عملة أربع مرات وسجل الأعلى للعملة كل مرة. كم متتابعة من الصور (H) والكتابة (T) نحصل عليها؟
- قائمة طعام فى مطعم تتكون من أربعة أطباق : طبق حساء ، الطبق الرئيسى ، طبق الحلويات ، طبق المشهيات. فإذا كان عدد اخيارات الحساء 4 ، الطبق الرئيسى 5 ، الحلويات 3 ، المشهيات 2 فكم قائمة يمكن أن يقدم المطعم؟
- ألقى زهر طاولة أربع مرات وسجلت الأرقام التى تظهر على الوجه الأعلى فى متتابعة. كم متتابعة يمكن أن نحصل عليها؟
- احسب كلا من $^4P_4$ ، ^6P ، $^7P_2$ ، $^nP_{n-1}$ ، $^nP_{n-2}$ ، $^{n+1}P_n$.
- أوجد الفرق بين $^8P_3$ ، $^7P_4$.
- ١٠. اختصر $\frac{12!}{10!}+\frac{13!}{11!}$.
- إذا كان $^{n+1}P_2 = 110$ أوجد n .
- ١٢. إذا كان $^nP_4 = {}^{n+1}P_3$ أوجد n .

١٣. بكم طريقة يمكن أن يجلس ستة تلاميذ وست تلميذات فى صف واحد:

(أ) بدون أى قيد. (ب) تلميذ – تلميذة – تلميذ – تلميذة – ...

١٤. أوجد عدد تبديلات الحروف فى الكلمة "group".

١٥. بكم طريقة يمكن أن يجلس ستة أشخاص على مائدة مستديرة ذات ستة مقاعد؟

١٦. خصص رف فى مكتبة ليعرض فيه ستة كتب جديدة. فإذا كان لدينا 8 كتب فى الحاسب نختار من بينها 4 ، 5 كتب فى اللغة الإنجليزية نختار من بينها 2 فبكم طريقة يمكن أن نعرض فيها الكتب إذا كانت الكتب من نوع واحد تعرض متجاورة؟

١٧. احسب كلا من ${}^{7}C_7$ ، ${}^{7}C_4$ ، ${}^{6}C_5$ ، ${}^{n}C_{n-1}$ ، ${}^{n}C_{n-2}$ ، ${}^{n+1}C_{n-1}$.

١٨. إذا كان ${}^{20}C_{3n+1} = {}^{20}C_{n+11}$ أوجد n .

١٩. بكم طريقة يمكن نختار لجنة من ثلاثة أعضاء هيئة التدريس وطالبين وذلك من سبعة أعضاء هيئة التدريس وثمانية طلاب؟

٢٠. مصنع لإنتاج الحاسبات يخطط لحملة إعلامية من ستة إعلانات. فإذا كان لدينا ستة مجلات ، ثلاثة صحف ، قناتين للتليفزين ، أربع محطات إذاعية فبكم طريقة يمكن أن تنفذ الحملة الإعلامية فى الحالتين الآتيتين:

(أ) كلها فى المجلات؟ (ب) ٢ فى المجلات، ٢ فى الصحف، ١ فى التليفزيون

٢١. بكم طريقة يمكن اختيار ثمانية أوراق كوتشينة: خمس لونها أحمر ، ثلاث لونها أسود؟

٢٢. كيس يحتوى على ١٥ كرة: ثمانية منها حمراء ، سبعة سوداء. بكم طريقة يمكن أن نختار خمس كرات من الكيس بحيث:

(أ) كلها حمراء (ب) كلها سوداء (ج) ٢ حمر (د) ٢ سود

الدرس الثانى

نظرية الاحتمالات (١)

THEORY OF PROBABILITY (1)

١-٢ التجربة العشوائية Random Experiments

هى تجربة نستطيع أن نحدد مقدما (قبل إجرائها) جميع النواتج ***outcomes*** الممكنة لها مع عدم استطاعتنا التنبؤ أيا من هذه النواتج سوف يتحقق فعلا بعد إجراء التجربة.

مثال (١)

عند إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة الوجه الظاهر فالنواتج الممكنة هى:

صورة H *head* ، كتابة T *tail*

مثال (٢)

عند إلقاء حجر نرد (زهر طاولة) مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فالنواتج الممكنة هى:

⚀ , ⚁ , ⚂ , ⚃ , ⚄ , ⚅

مثال (٣)

عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين وملاحظة الوجهين الظاهرين فالنواتج الممكنة هى HH , HT , TH , TT .

٢-٢ فضاء النواتج (فضاء العينة) Space of Outcomes (Sample Space)

هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية. سنرمز لفضاء النواتج بالرمز S.

مثال (١)

فضاء النواتج فى تجربة إلقاء عملة مرة واحدة هو:

$S = \{H,T\}$

مثال (٢)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال (٣)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء عملة مرتين هو:

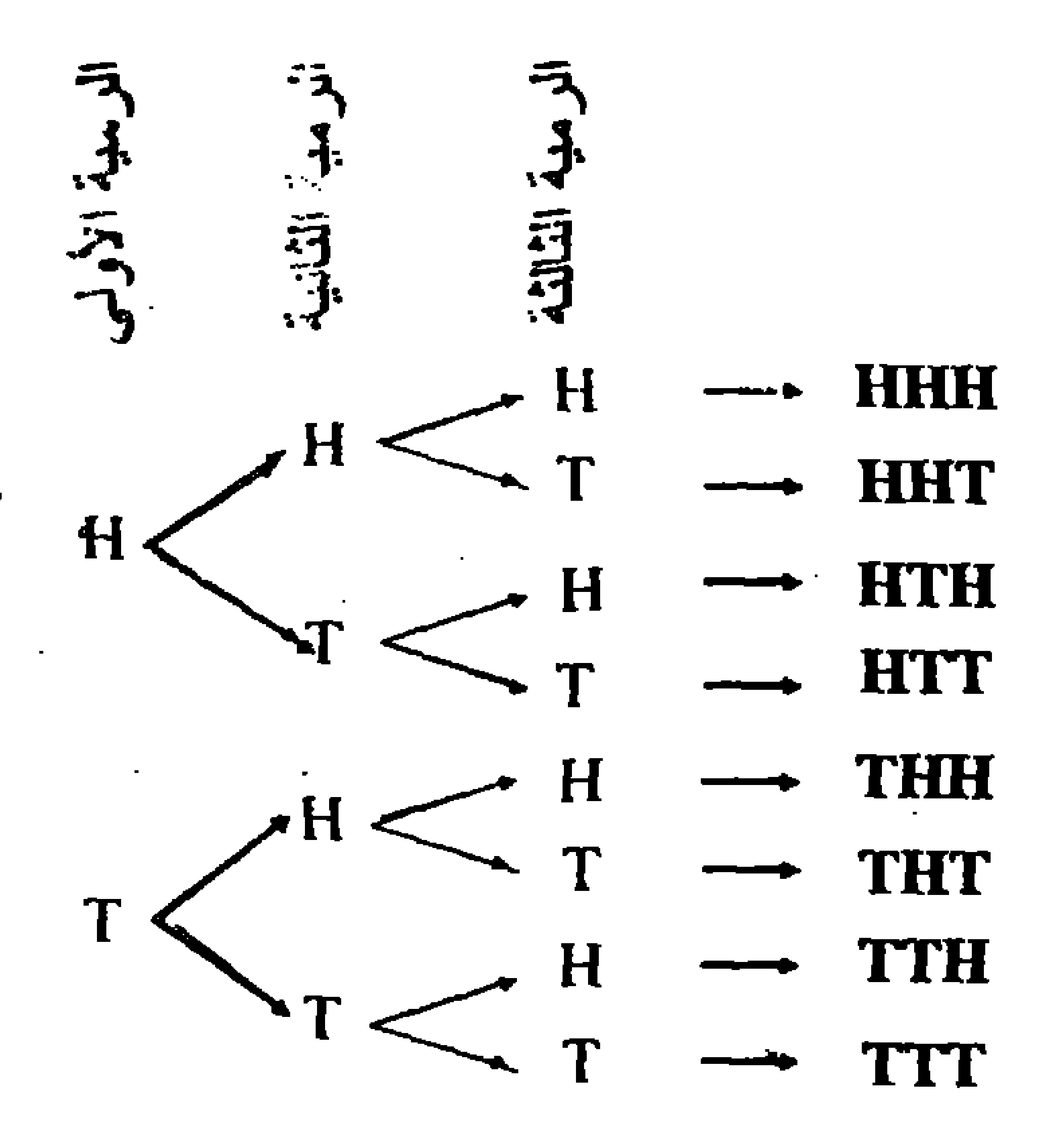
$S = \{HH , HT , TH , TT\}$

مثال (٤)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء عملة ثلاث مرات هو:

$S = \{HHH , HHT, HTH , HTT, THH , THT, TTH , TTT\}$

ويمكن استنتاج فضاء النواتج لهذه التجربة كالآتى:



ويعرف هذا الشكل بـ شجرة الاحتمالات *probability tree*.

مثال (٥)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين (أو حجرى نرد متمايزين مرة واحدة) يستنتج من الشكل الآتى:

الزهر الثانى

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

الزهر الأول

كما يمكن استنتاجه من الشجرة الآتية:

الزهر الأول

الزهر الثانى

1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6

لذا فإن فضاء النواتج لهذه التجربة هو:

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

٢-٣ الأحداث Events

الحدث *event* هو مجموعة جزئية من فضاء النواتج . وغالبا يكون الحدث له معنى يمكن التعبير عنه.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة مرتين يمكن أن نعرّف الأحداث الآتية:

ظهور صورتين بالضبط هو الحدث $E_1 = \{HH\}$

ظهور صورة واحدة على الأقل هو الحدث $E_2 = \{HH , HT , TH\}$

ظهور صورة واحدة على الأكثر هو الحدث $E_3 = \{HT , TH ,TT\}$

ظهور صورة واحدة بالضبط هو الحدث $E_4 = \{HT , TH\}$

ظهور وجهين متشابهين هو الحدث $E_5 = \{HH , TT\}$

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة يمكن أن نعرّف الأحداث الآتية:

ظهور عدد فردى هو الحدث $O = \{1,3,5\}$

ظهور عدد زوجى هو الحدث $E = \{2,4,6\}$

ظهور عدد أوّلى هو الحدث $P = \{2,3,5\}$

٢-٣-١ الحدث المؤكد The Certain Event

باعتبار فضاء النواتج مجموعة جزئية من نفسه فإنه يعتبر حدثا من الأحداث يسمى الحدث المؤكد ***certain event*** وذلك لأنه يحتوى جميع النواتج الممكنة.

٢-٣-٢ الحدث المستحيل The Impossible Event

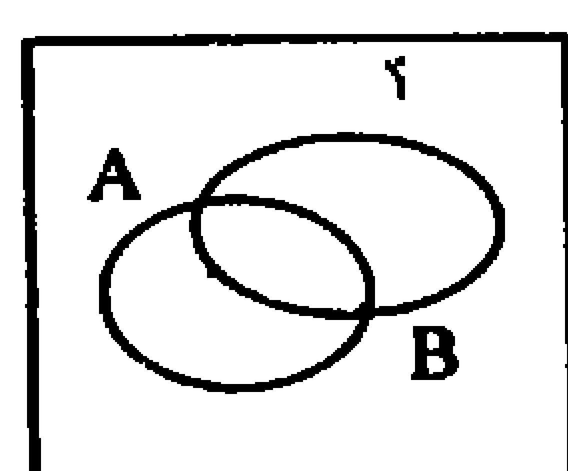
باعتبار المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من فضاء النواتج فإنها تعتبر حدثا من الأحداث يسمى الحدث المستحيل ***impossible event***.

٢-٣-٣ الأحداث الأولية Simple Events

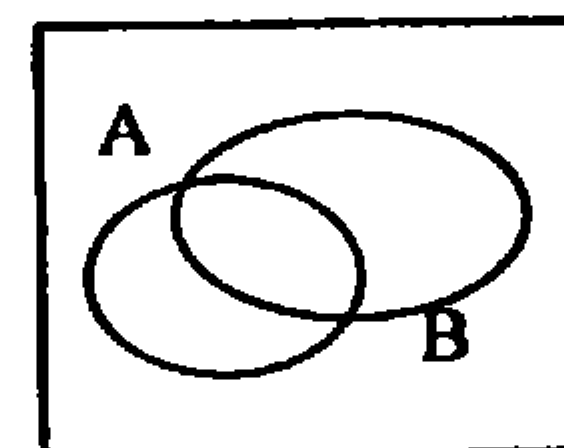
المجموعة التى تتألف من عنصر (ناتج) واحد من فضاء النواتج تسمى حدثا أوليا (بسيطا) ***simple event***.

٤-٢ جبر الأحداث Algebra of Events

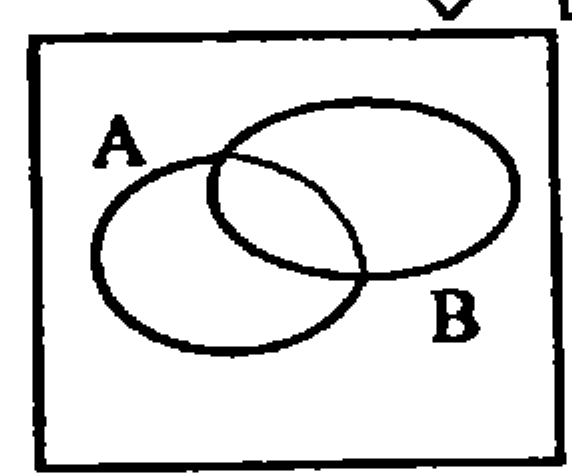
باعتبار الأحداث مجموعات جزئية من فضاء النواتج فإنها تخضع لجميع العمليات الجبرية للمجموعات من تقاطع واتحاد وفرق وتكميل ... إلخ. ونستطيع أن نستعين بأشكال فن حيث يعتبر فضاء النواتج S نفسه بمثابة المجموعة الشاملة.



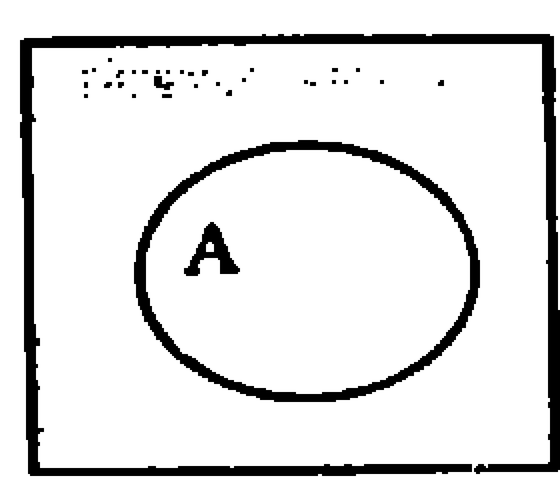
$A \cap B$



$A \cup B$



$A - B$



A'

هذا، وتسرى على الأحداث جميع قوانين جبر المجموعات من دمج وإبدال ومحايد ومعكوس ... إلخ والتى سبقت دراستها. فمثلا لأى ثلاثة أحداث E_1، E_2، E_3 فإن:

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3),$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$ (قانونا الدمج)

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3),$$

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$ (قانونا التوزيع)

$$(E_1 \cap E_2)' = E_1' \cup E_2' \ , \ (E_1 \cup E_2)' = E_1' \cap E_2'$$ (قانونا دى مورجان)

وهذه القوانين تفيد فى التعامل مع أحداث مركبة من أخرى بسيطة.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين أكتب كلا من الأحداث الآتية:

A : مجموع الوجهين يساوى 3 ، B : مجموع الوجهين يساوى 7

C : مجموع الوجهين يساوى 3 أو 7 ، D : مجموع الوجهين يساوى 3، 7

الحـــل

فضاء النواتج هو:

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$A = \{(1,2),(2,1)\},$

$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$

$C = A \cup B = \{(1,2),(2,1),(1,6),(2,5),(3.4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$D = A \cap B = \phi$ حدث مستحيل

٢-٥ الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events

يقال لحدثين E_1 ، E_2 أنهما منافيين لبعضهما البعض إذا استحال وقوعهما معا ، أى إذا كانت المجموعتان E_1 ، E_2 متباعدتين، أى إذا كان:

$$E_1 \cap E_2 = \phi$$

ويقال لعدة أحداث E_1 ، E_2، ... ، E_n أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى، أى إذا كان:

$$E_i \cap E_j = \phi \qquad \forall\, i \neq j$$

ملحوظة (١)

الأحداث الأولية متنافية.

ملحوظة (٢)

أى حدث E ومكمله E' هما حدثان متنافيان.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الحدثين "ظهور عدد زوجى" ، "ظهور عدد فردى" هما حدثان متنافيان وذلك لأن $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \phi$.

فى حين أن الحدثين $E_1 = \{1,2,3,4\}$ ، $E_2 = \{3,4,5,6\}$ غير متنافيين حيث أن $E_1 \cap E_2 = \{3,4\} \neq \phi$.

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء عملتين متمايزتين مرة واحدة فإن الحدثين E_1 "الوجهان متشابهان"، E_2 "الوجهان مختلفان" هما حدثان متنافيان وذلك لأن:

$$E_1 = \{HH, TT\}\ ,\ E_2 = \{HT, TH\}\ ,\ E_1 \cap E_2 = \phi$$

فى حين أن الحدثين E_3 "صورة على الأقل"، E_4 "صورة واحدة على الأكثر" غير متنافيين حيث أن:

$$E_3 = \{HH, HT, TH\} ، E_4 = \{HT, TH, TT\}, E_3 \cap E_4 = \{HT, TH\} \neq \phi .$$

مثال (٣)

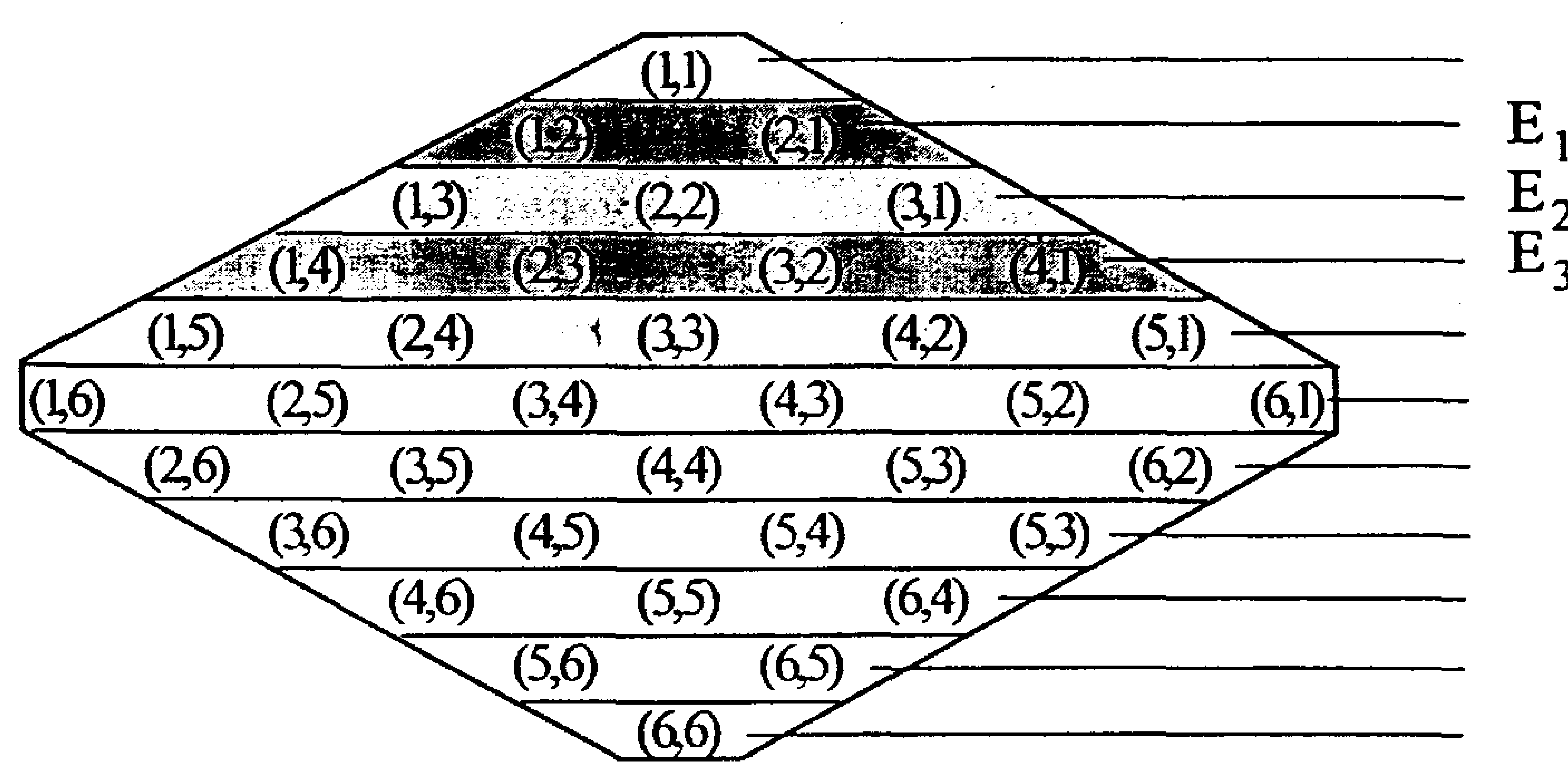
فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة فإن الأحداث:

$E_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ "مجموع الوجهين يساوى 3"

$E_2 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ "مجموع الوجهين يساوى 4"

$E_3 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ "مجموع الوجهين يساوى 5"

هى أحداث متنافية.



٢-٦ الأحداث الشاملة (المستنفذة) Exhaustive Events

يقال لمجموعة الأحداث $\{E_1 \,،\, E_2 \,،\, \ldots \,،\, E_n\}$ أنها شاملة (مستنفذة) إذا كان اتحاد عناصرها هو فضاء النواتج، أى إذا كان:

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S$$

يقال لمجموعة الأحداث $\{E_1 \,،\, E_2 \,،\, \ldots \,،\, E_n\}$ أنها **تجزىء** لفضاء النواتج إذا كانت شاملة ومتنافية معا، أى إذا كان:

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S \quad ، \quad E_i \cap E_j = \phi \qquad \forall\ i \neq j$$

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملتين متمايزتين مرة واحدة فإن مجموعة الأحداث:

$$\{\{HH\},\{HT,TH\},\{TT\}\}$$

هى تجزىء لفضاء النواتج؛

فى حين أن كلا من المجموعتين :

$$\{\{HH\},\{TT\}\} \quad , \quad \{\{HH\},\{HT\},\{TH, TT\}\}$$

ليست تجزينا لفضاء النواتج.

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء حجر نرد فإن مجموعة الأحداث:

$$\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}\}$$

هى تجزىء لفضاء النواتج فى حين أن المجموعة:

$$\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5,6\}\}$$

ليست تجزينا (وإن كانت شاملة).

٢-٦ التعريف التقليدى للاحتمال The Classical Approach to Probability

لنفرض 10 طلاب a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ؛ ولتكن أطوالهم بالسنتيمتر مبينة بالجدول الآتى:

الطالب	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
الطول	160	150	170	160	170	180	190	160	155	150

لنفرض أننا كتبنا الحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j كلا فى وريقة وطوينا هذه الوريقات ووضعناهم فى كيس ثم سحبنا وريقة من الوريقات من الكيس بطريقة عشوائية. ما هى فرصة أن يكون طول الطالب المكتوب اسمه على الوريقة يساوى 160 سنتيمتر؟ لدينا فى القائمة 3 طلاب من الـ 10 بهذا الطول. تستطيع أن نقول إذن أن الفرصة تساوى 0.3 أى ؛ وبلغة أخرى نقول أن احتمال أن يكون طول الطالب 160 سنتيمتر يساوى 0.3. وبوجه عام:

> إذا كان عدد عناصر حدث ما E يساوى m وكان عدد عناصر فضاء النواتج يساوى n وكل منها له نفس فرصة الظهور فإن احتمال وقوع الحدث هو:
>
> $$P(\text{E}) = m/n$$

ملحوظة

إذا أخذنا كل فئات الأطوال وهى 150 ، 155 ، 160 ، 170 ، 180 ، 190 فإننا نستطيع أن نكون جدول الاحتمالات الآتى:

الطول	150	155	160	170	180	190
الاحتمال	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوى 1.

٢-٧ التعريف التجريبى للاحتمال The Experimental Approach to Probability

لنفرض أننا ألقينا زهر طاولة 36 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى للزهر فوجدناه مبينا بالجدول الآتى:

الوجه	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
التكرار	5	6	8	7	4	6

فإن فرص ظهور الأوجه الستة للزهر تكون كما يلى:

الوجه	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
الفرصة	5/36	6/36	8/36	7/36	4/36	6/36

لنفرض أننا لم نكتف بإلقاء الزهر 36 مرة وألقيناه 360 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى للزهر فوجدناه مبينا بالجدول الآتى:

الوجه	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
التكرار	58	62	57	63	59	61

فإن فرص ظهور الأوجه الستة للزهر تصبح كما يلى:

الوجه	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
الفرصة	58/360	62/360	57/360	63/360	59/360	61/360

نلاحظ أن كل فرصة قد اقتربت من 1/6 وكلما زدنا عدد مرات رمى الزهر كلما اقتربنا أكثر من هذه القيمة حتى إذا زاد العدد إلى ما لانهاية فإن كل الفرص تساوى احتمال ظهور الوجه ويساوى 1/6 . وهذا هو المفهوم التجريبى للاحتمال.

٢-٨ التعريف الرياضى للاحتمال The Mathematical Definition of Probability

ليكن S هو فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما. فإن لكل حدث $A \subset S$ يوجد عدد حقيقى $P(A)$ يسمى "احتمال الحدث A" "*Probability of the event* A" ويحقق المسلمات الآتية:

(١) احتمال أى حدث يقع بين 0 ، 1. أى أن $0 \le P(A) \le 1$

(٢) احتمال الحدث المؤكد يساوى 1. . أى أن $P(S) = 1$

(٣) إذا كان A ، B حدثين متنافيين أى $A \cap B = \phi$ فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ويمكن أن نعمم المسلمة (٣) لتشمل عددا محدودا من الأحداث المتنافية E_1 ، E_2 ،...، E_n كالآتى:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$$

وإذا كانت E_1، E_2، ... ، E_n أحداثا متنافية وشاملة، فإن:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = 1$$

لنفرض الآن أن فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما هو:

$$S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

وحيث أن الأحداث الأولية:

$$\{e_1\}, \{e_2\}, ..., \{e_n\}$$

هى أحداث متنافية، لذا فإن:

$$P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup ... \cup \{e_n\}) = P\{e_1\} + P\{e_2\} + ... + P\{e_n\}) = 1$$

فإذا كانت الأحداث الأولية متساوية الاحتمال ***equally likely*** فإن:

$$P\{e_1\} = P\{e_2\} = ... = P\{e_n\} = 1/n$$

كذلك فإنه إذا احتوى الحدث E على عدد m من النواتج فإن:

$$P(E) = m/n$$

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{H,T\}$$

لذا فإن:

$$P(\{H\}) = 1/2 \quad , \quad P(\{T\}) = 1/2$$

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم فإن فضاء النواتج هو :

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لذا فإن:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = ... = P(\{6\}) = 1/6 ,$$
$$P(\{1,2\}) = P(\{4,5\}) = 2/6 = 1/3,$$
$$P(\{1,3,5)\} = P(\{2,4,6\}) = 3/6 = 1/2.$$

مثال (٣)

فى تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة مرتين فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

لذا فإن:

$$P(\{HH,TT\}) = 1/2 , P(\{HH,HT,TH\}) = 3/4 , P(\{HT,TH\}) = 1/2$$

مثال (٤)

فى تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة ثلاث مرات فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ويكون احتمال ظهور صورتين على الأقل هو:

$$P(\{HHH, HHT, HTH, THH\})$$

ويساوى 1/2 ؛ واحتمال ظهور صورتين على الأكثر هو:

$$P(\{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\})$$

ويساوى 7/8. أما احتمال ظهور صورتين بالضبط فهو:

$$P(\{HHT, HTH, THH\})$$

ويساوى 3/8.

مثال (٥)

إذا كان احتمال ظهور الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 فى نرد غير منتظم كالآتى:

$$P\{1\} = 0.12 \quad , \quad P\{2\} = 0.15 \quad , \quad P\{3\} = 0.17,$$
$$P\{4\} = 0.17 \quad , \quad P\{5\} = 0.18 \quad , \quad P\{6\} = 0.21$$

أوجد احتمال ظهور عدد أولى.

الحـــل

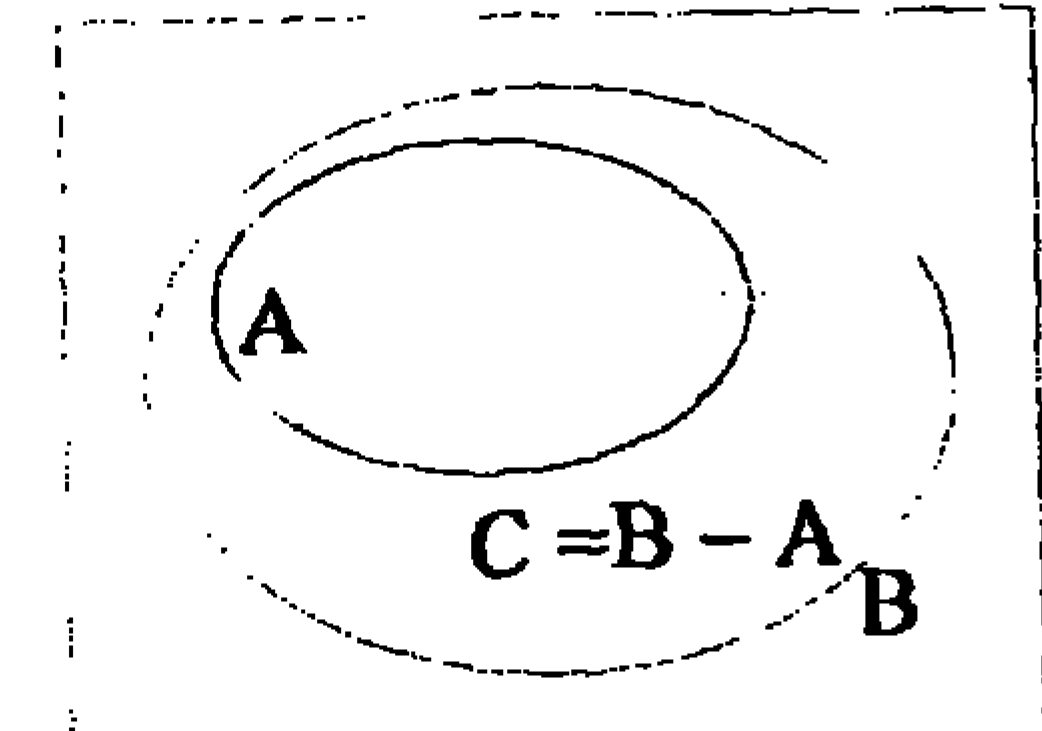
$$P\{2, 3, 5\} = 0.15 + 0.17 + 0.18 = 0.5$$

٢-٩ نظريات هامة فى الاحتمالات

نظرية (١)

	ليكن A ، B حدثين فى S ، وليكن $A \subset B$ فإن:
(i)	$P(A) \le P(B)$
(ii)	$P(B - A) = P(B) - P(A)$
(iii)	$P(\phi) = 0$

البرهان



لنفرض أن $A \subset B$ ، $C = B - A$.

وحيث أن $A \cap C = \phi$ ، إذن:

$$B = A \cup C \,,\; P(B) = P(A) + P(C) \quad \text{((مسلمة (٣))}$$

$$\therefore \; P(C) = P(B) - P(A) \;\therefore\; \boxed{P(A) \le P(B)}$$

$$\therefore \; \boxed{P(B - A) = P(B) - P(A)}$$

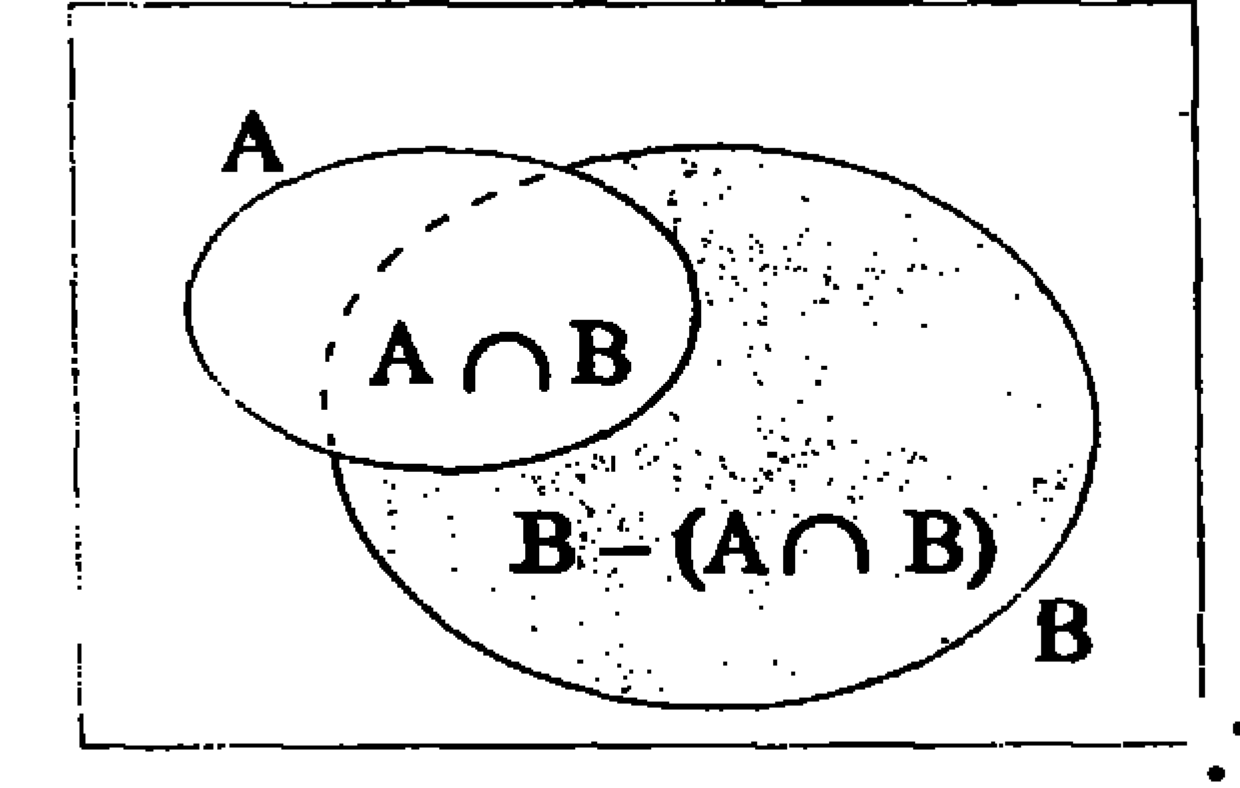
بوضع $A = B$ ينتج أن : $\boxed{P(\phi) = 0}$

نظرية (٢)

ليكن A ، B حدثين فى S فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

البرهان



انظر الشكل الذي إلى اليسار: ⟸

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - (A \cap B))$$

ولكن الحدثان A ، $B - (A \cap B)$ متنافيان.

$$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B - (A \cap B))$$

وحيث أن $B \subset (A \cap B)$، إذن من نظرية (١) ينتج أن:

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (١)

فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين نلاحظ الآتى:

الحدث مجموع الوجهين أكبر من 6 هو:

$$A = \{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

الحدث الفرق بين الوجهين أقل من 2 هو:

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \; , \; P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$(A \cap B) = \{(3.4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36}$$

$$\therefore \; P(A \cup B) = \frac{21}{36} + \frac{16}{36} - \frac{9}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

مثال (٢)

وجد صاحب ورشة لإصلاح الفرامل وضبط الموتور أن احتمال أن تحتاج أى سيارة إلى ضبط الموتور يساوى 0.6 واحتمال أن تحتاج السيارة إلى إصلاح للفرامل يساوى 0.1 وأن تحتاج السيارة إلى كلى العملين يساوى 0.02.

(أ) ما هو احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل؟

(ب) ما هو احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور وليس إصلاح الفرامل؟

(ج) ما هو احتمال ألا تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل؟

الحـــل

نفرض أن A: السيارة تحتاج إلى ضبط الموتور ، B : السيارة تحتاج إلى إصلاح الفرامل. إذن:

(أ) احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.1 - 0.02 = 0.68$$

(ب) احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور وليس إصلاح الفرامل هو:

$$(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.02 = 0.58$$

(ج) احتمال ألا تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل هو:

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$$

نظرية (٣)

$$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

البرهان

$$A \cup A' = S \quad , \quad A \cap A' = \phi$$

$$\therefore \quad P(S) = 1 = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$\therefore \quad P(A) + P(A') = 1$$

نظرية (٤)

$$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

البرهان

إذا كانت A_1 ، A_2 ، ... ، A_n أحداثا شاملة ومتنافية فإن:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

مثال (١)

يحتوى صندوق على ٦ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء و ٧ كرات حمراء. سحبت كرة عشوائية، احسب احتمالات كل مما يأتى:

(أ) A: الكرة بيضاء — (ب) B : الكرة حمراء

(ج) C: الكرة ليست بيضاء — (د) D: الكرة بيضاء أو حمراء

الحـــل

$$P(\mathrm{A})=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P(\mathrm{B})=\frac{7}{16}$$

$$P(\mathrm{C})=1-P(\mathrm{A})$$

$$=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(\mathrm{D})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{7}{16}=\frac{13}{16}$$

مثال (٢)

رمى حجرا نرد منتظمين ومتمايزين. إذا كان:

A: مجموع الوجهين أكبر من أو يساوى 10،

B: الفرق بين الوجهين أقل من أو يساوى 1. أوجد:

(أ) $P(\mathrm{A})$ — (ب) $P(\mathrm{B}')$

(ج) $P(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ — (د) $P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})$ ، $P(\mathrm{A}\cup \mathrm{B})$

الحـــل

$$\mathrm{A}=\{(4.6).(5.5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore\ P(\mathrm{A})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{B}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),$$
$$(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore\ P(\mathrm{B})=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}\ ,\quad P(\mathrm{B}')=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$A - B = \{(4,6), (6,4)\}$$

$$\therefore \; P(A - B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$\therefore \; P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

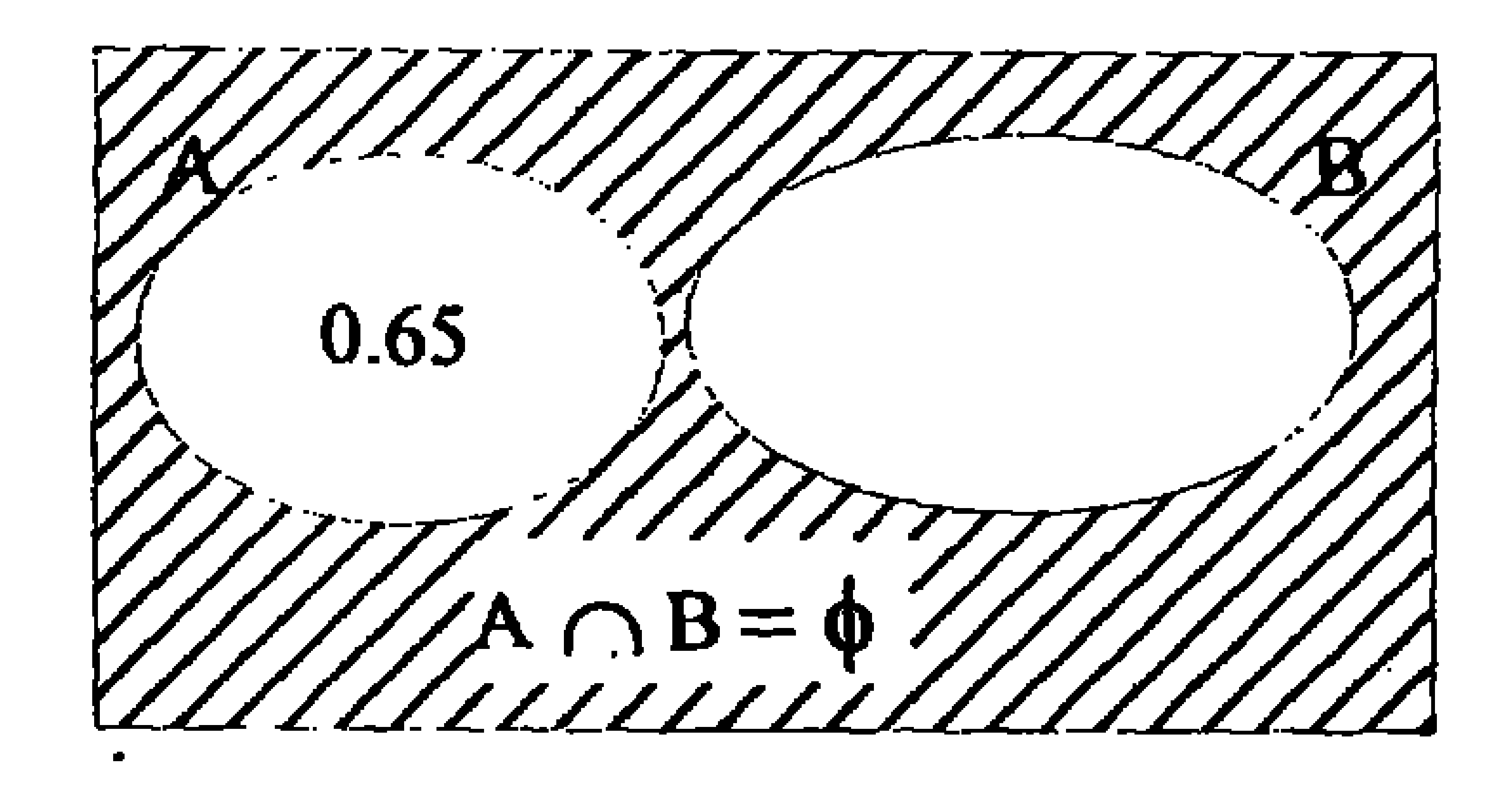
$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

مثال (٣)

إذا كان احتمال أن يكسب فريق كرة قدم يساوى 0.65 واحتمال أن يتعادل يساوى 0.05 فما هو احتمال أن يخسر؟

الحــــل

نفرض أن الحدث: الفريق يكسب هو A ، الحدث: الفريق يخسر هو B. وحيث أن الفريق لا يمكن أن يكسب ويخسر فى آن واحد، إذن A ، B متنافيان بالتبادل. نرسم الشكل الآتى:



الحدث: الفريق يتعادل يمثل بالمنطقة المظللة. أى $(A \cup B)'$.

$$\therefore \; P(A \cup B)' = 0.05$$

$$\therefore \; P(A \cup B) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\therefore \; P(A) + P(B) = 0.95$$

$$\therefore \; P(B) = 0.95 - P(A) = 0.95 - 0.65 = 0.30$$

إذن احتمال أن يخسر الفريق يساوى 0.3.

تمـــــــرين ٢

١. سحبت ورقة كوتشينة من مجموعة قياسية. أكتب عناصر فراغ النـــواتج فى الحـــالات الآتية:

(أ) إذا كنا مهتمين بلون الورقة (أحمر – أسود).

(ب) إذا كنا مهتمين بنوع الورقة (♠ ، ♣ ، ♥ ، ♦).

٢. أكتب فراغ النواتج لكل من التجارب العشوائية الآتية:

(أ) إلقاء عملة مرتين ثم إلقاء زهر طاولة مرة واحدة.

(ب) إنجاب ثلاثة أطفال وكل طفل إما أن يكون ولدا B أو بنتا G.

٣. أكتب عدد نواتج كل من التجارب العشوائية الآتية:

(أ) إلقاء عملة 4 مرات.

(ب) إلقاء زهرى طاولة مرتين ثم إلقاء عملة مرة واحدة.

٤. أكتب عناصر فضاء النواتج التالية:

(أ) $S = \{x : 5 < x < 50 \ , x/8 \in N\}$ (ب) $S = \{x : x^2 - x - 6 = 0\}$

٥. إذا كان A ، B حدثين من فضاء النواتج S ، عُرِّف بكلمات واضحة الأحداث التالية:

(أ) $A \cap B$ (ب) $A \cup B$ (ج) $A - B$

(د) A' (هـ) $A' \cap B$ (و) $A' \cup B'$

٦. إذا كانت الأحداث A ، B ، C مُعَرَّفة على فضاء عينة لتجربة عشوائية، فعبر مستخدماً الرموز عن الأحداث التالية:

(أ) حدوث A مع عدم حدوث B. (ب) عدم حدوث أى حدث.

(ج) حدوث A ، B ، C معاً. (د) حدوث حدث واحد على الأقل.

(هـ) حدوث A ، B مع عدم حدوث C.

٧. فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين:

(أ) اكتب فضاء النواتج.

(ب) اكتب الحدث A : ظهور رقمين متساوين.

(ج) اكتب الحدث B: ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7.

(د) اكتب الحدث C : ظهور 4 على الحجر الثانى.

(هـ) اكتب الأحداث $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A \cap C$.

٨. إذا كان A ، B حدثين فى فضاء نواتج S وكان:

$$P(A) = 0.2, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.5$$

فأوجد كلا من $P(A \cap B)$ ، $P(A' \cap B)$ ، $P(A \cap B')$ ، $P(A' \cap B')$.

٩. فى تجربة إلقاء عملة مرتين كتب ستة طلاب الاحتمالات الآتية:

	فضاء النواتج			
	HH	HT	TH	TT
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	0	0	0	1
3	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
6	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

(أ) أى من الإجابات يتفق مع مسلمات الاحتمال؟

(ب) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا علمنا أن العملة منتظمة؟

(ج) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا فرضنا أن الكتابة تظهر دائما؟

(د) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا فرضنا أن احتمال ظهور الكتابة ضـــعف

٩. فى فراغ النواتج $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ ليكن:

$$P(e_1)=P(e_2)=P(e_6),\ P(e_3)=2P(e_4)=\tfrac{1}{2}P(e_1),$$

(أ) أوجد $P(e_1)$ ، $P(e_2)$ ، $P(e_3)$ ، $P(e_4)$ ، $P(e_5)$ ، $P(e_6)$ ، $P(e_7)$.

(ب) إذا كانت الأحداث A ، B ، C ، D تُعرف كالآتى:

$A=\{e_1,e_2\}$ ، $B=\{e_2,e_3,e_4\}$ ، $C=\{e_5,e_6,e_7\}$ ، $D=\{e_1,e_5,e_6\}$

فأوجد $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A\cap D)$ ، $P(D\cap$

١٠. إذا كان $P(B)=\frac{2}{3}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ ، $P(A\cap B')=\frac{1}{4}$ فاحسب كلا من $P(A)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A'\cap B')$.

١١. صندوق به 8 كرات سوداء ، 6 كرات صفراء ، 4 كرات حمراء. فإذا سحبت كرة واحدة عشوائيا أوجد احتمال أن تكون الكرة:

(أ) سوداء (ب) صفراء (ج) حمراء (د) ليست صفراء

١٢. تم اختيار 10 وحدات عشوائيا من منتج معين. فإذا كانت A ، B ، C ترمز للأحداث الآتية:

A: وحدة على الأقل تالفة، B : جميع الوحدات سليمة، C : 4 وحدات تالفة، ففسر الأحداث:

(أ) $A\cup C$ (ب) $A\cap C$ (ج) $A\cap B$ (د) $A\cup B$

١٣. ألقى زهرا نرد منتظمين مرة واحدة. أوجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين أعلى الزهرين:

(أ) أكبر من أو (ب) أقل من 7 (ج) فردى أكبر من 6

١٤. إذا علمت أن احتمال سقوط الثلج يساوى 0.2 واحتمال سقوط المطر يساوى 0.45 واحتمال أن يسقط ثلج أومطر يساوى 0.6 فأوجد احتمالات الأحداث الآتية:

(أ) أن يسقط ثلج ومطر (ب) أن يسقط ثلج ولا يسقط مطر

(ج) ألا يسقط ثلج أو مطر

١٥. إذا كان $P(A) = 0.2$ ، $P(A \cup B) = 0.7$ فأوجد $P(B)$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

(أ) A ، B حدثان متنافيان (الحدث A مجموعة جزئية من

١٦. إذا كان $P(A) = 0.25$ ، $P(B) = 0.4$ فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) $P(A')$ (ب) $P(B')$ (ج) $P(A \cup B)$ إذا كانا A،B متنافيين بالتبادل.

١٧. يدرس طالب مادتى الرياضيات والفيزياء. فإذا قدر الطالب لنفسه أن احتمال نجاحه فى الرياضيات يساوى 0.8 واحتمال نجاحه فى الفيزياء يساوى 0.6 واحتمال نجاحه فى مادة منهما على الأقل يساوى 0.9 فما احتمال نجاح الطالب فى كلتى المادتين؟

١٨. فى دراسة لاحتمالات عدد أجهزة التليفزيون التى تقتنيها الأسر وجد الآتى:

عدد الأجهزة	0	1	2	3	4 أو أكثر
الاحتمال	0.05	0.24	0.33	0.20	0.18

أوجد احتمال أن تقتنى الأسرة الآتى:

(أ) جهاز واحد على الأقل (ب) جهاز واحد على الأكثر

(ج أقل من جهازين (د) جهازين على الأقل

الدرس الثالث

نظرية الاحتمالات (٢)

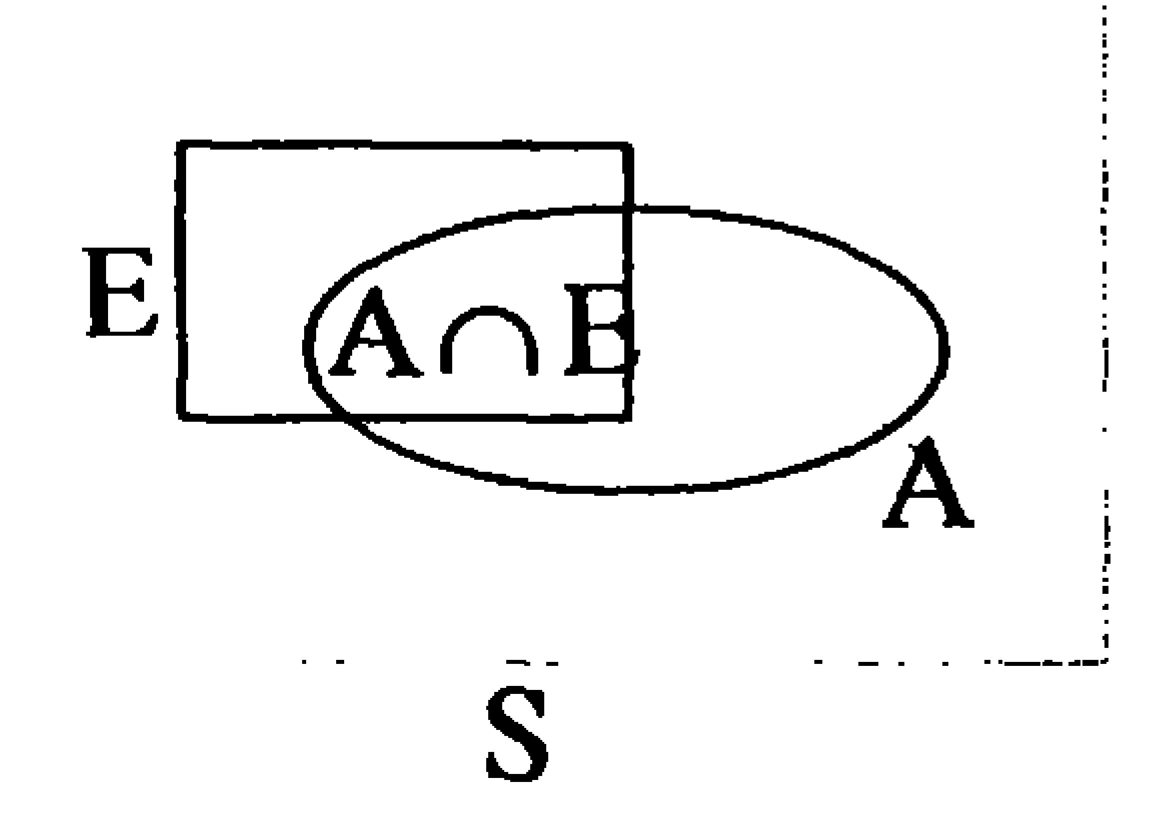
THEORY OF PROBABILITY (2)

٣-١ الاحتمال المشروط Conditional Probability

ليكن E حدثا اختياريا فى فضاء نواتج S. احتمال وقوع أى حدث A بشرط حدوث E يرمز له بالرمز $P(A|E)$ ويُعرَّف كالآتى:

$$P(A\,|\,E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

أى أن $P(A|E)$ يقيس الاحتمال النسبى لوقوع الحدث A بالنسبة للفضاء المختزل $E \subset S$. الشكل الآتى يوضح هذا المفهوم: ⇦



مثال (١)

ليكن S هو فضاء نواتج تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، وليكن E هو الحدث: مجموع الوجهين زوجى، وليكن A هو الحدث: أحد الوجهين يساوى 5.
أوجد احتمال A بشرط E.

الحـــل

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots\ldots, (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), \ldots\ldots, (2,6),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(6,1), (6,2), \ldots\ldots, (6,6)\}$$

$$E = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5),$$
$$(4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$P(E) = 1/2$$

$$A = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$$

$$A \cap E = \{(1,5),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\} \quad P(A \cap E) = 5/36$$

$$\therefore \ P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{5}{36} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

الشكل الآتى يوضح المسألة:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5.2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

مثال (٢)

فى تجربة رمى حجرى نرد متمايزين أوجد احتمال:

(أ) أن يكون مجموع الوجهين يساوى 7.

(ب) أن يكون مجموع الوجهين يساوى 7 إذا علمت أن أحد الوجهين أو كلاهما يساوى 3 فأكثر.

الحــــل

(أ) ليكن A: مجموع الوجهين 7 .

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$\therefore \ P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ب) ليكن B: أحد الوجهين أو كلاهما يساوى 3 فأكثر.

$$B = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore \ P(B) = \frac{16}{36}$$

$$A \cap B = \{(3,4),(4,3)\}$$

$$\therefore \ P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore \ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{16/36} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

من الشكل نستنتج أن:

$$P(\mathrm{A}\mid\mathrm{B})=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

مثال (٣)

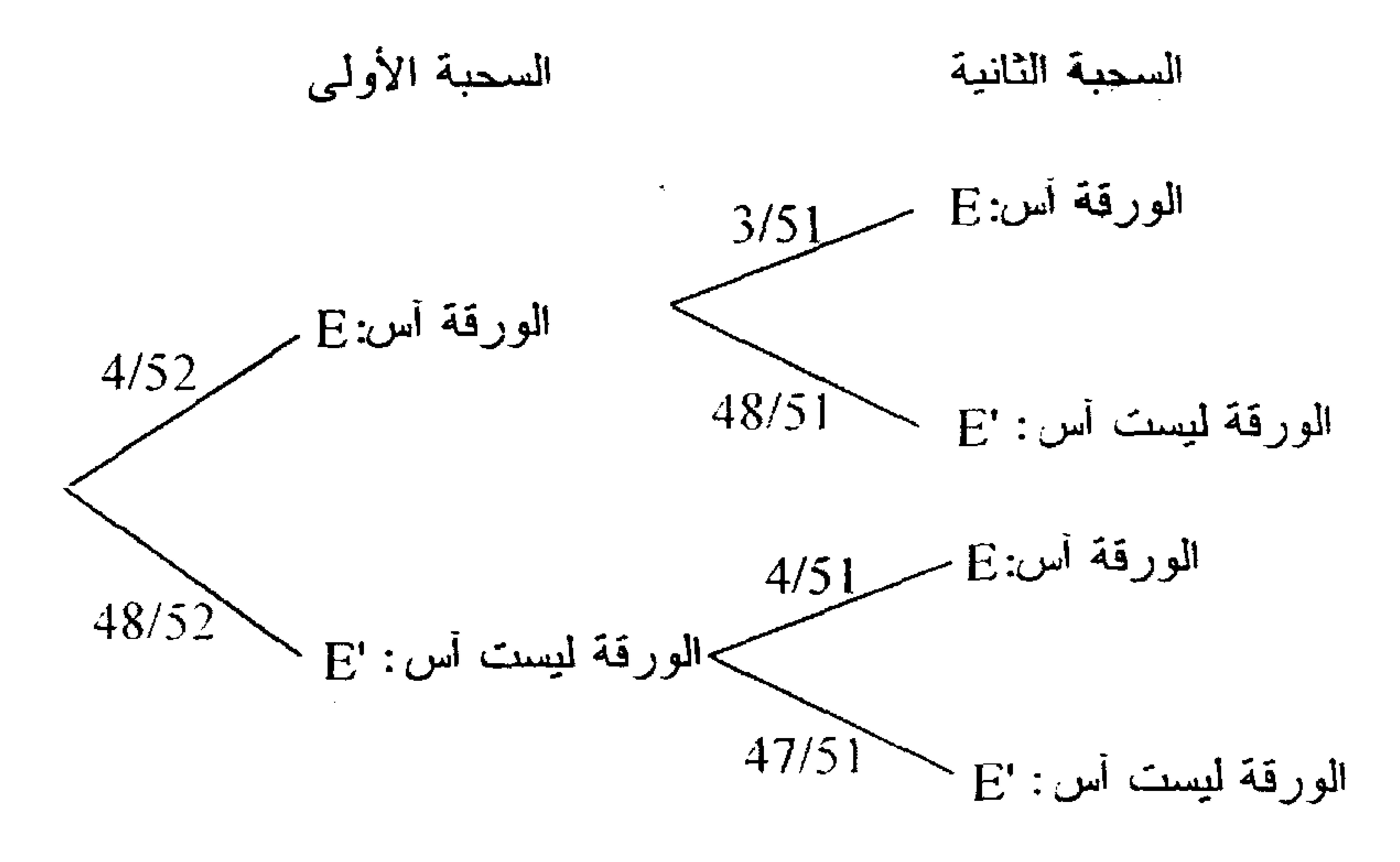
فى تجربة سحب ورقتين من أوراق لعب (كوتشينة) مكونة من 52 ورقة، ما هو احتمال:

(أ) أن تكون الورقة الثانية آس بشرط أن تكون الورقة الأولى آس؟

(ب) أن تكون الورقة الثانية آس بشرط أن تكون الورقة الأولى ليست آس؟

الحـــل

ليكن E: الورقة آس وليكن ´E: الورقة ليست آس. نرسم شجرة الاحتمالات الآتية:



واضح من الشكل أن:

(أ) احتمال أن تكون الورقة الثانية آس بشرط أن تكون الورقة الأولى آس= 3/51

(ب) احتمال أن تكون الورقة الثانية آس بشرط أن تكون الورقة الأولى ليست آس يساوى 4/51 .

٣-٢ نظريات الاحتمال المشروط

نظرية (١)

إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن:

$$P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E)$$

ويسمى ذلك قانون الجمع.

البرهان

إذا كان A ، B متنافيين فإن كلا من $A\cap E$ ، $B\cap E$ يكونان أيضا متنافيين.

$$P(A \cup B|E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{P[(A \cap E) \cup (B \cap E)]}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)}$$

$$= P(A|E) + P(B|E)$$

ويمكن تعميم قانون الجمع لعدة أحداث كما يلي:

إذا كانت A_1 ، A_2 ، ... ، A_n أحداثا متنافية فإن:

$$P\left(= \bigcup_{i=1}^{n} A_i | E\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i | E)$$

نظرية (٢)

لأى حدثين A ، B فإن:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) = P(B \cap A)$$

ويسمى ذلك قانون الضرب.

البرهان

$$\because \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

مثال (١)

فى تجربة سحب ورقتين من أوراق لعب (كوتشينة) مكونة من 52 ورقة ما هو احتمال أن تكون الورقتان الأوليان فى السحب آسين؟

الحـــل

ليكن E هو الحدث : الورقة آس.

$$P(\mathrm{E}) = \frac{4}{52} \;,\; P(E \mid \mathrm{E}) = \frac{3}{51}$$

$$\therefore \quad P(\mathrm{E} \cap \mathrm{E}) = P(\mathrm{E} \mid \mathrm{E}) P(\mathrm{E}) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

مثال (٢)

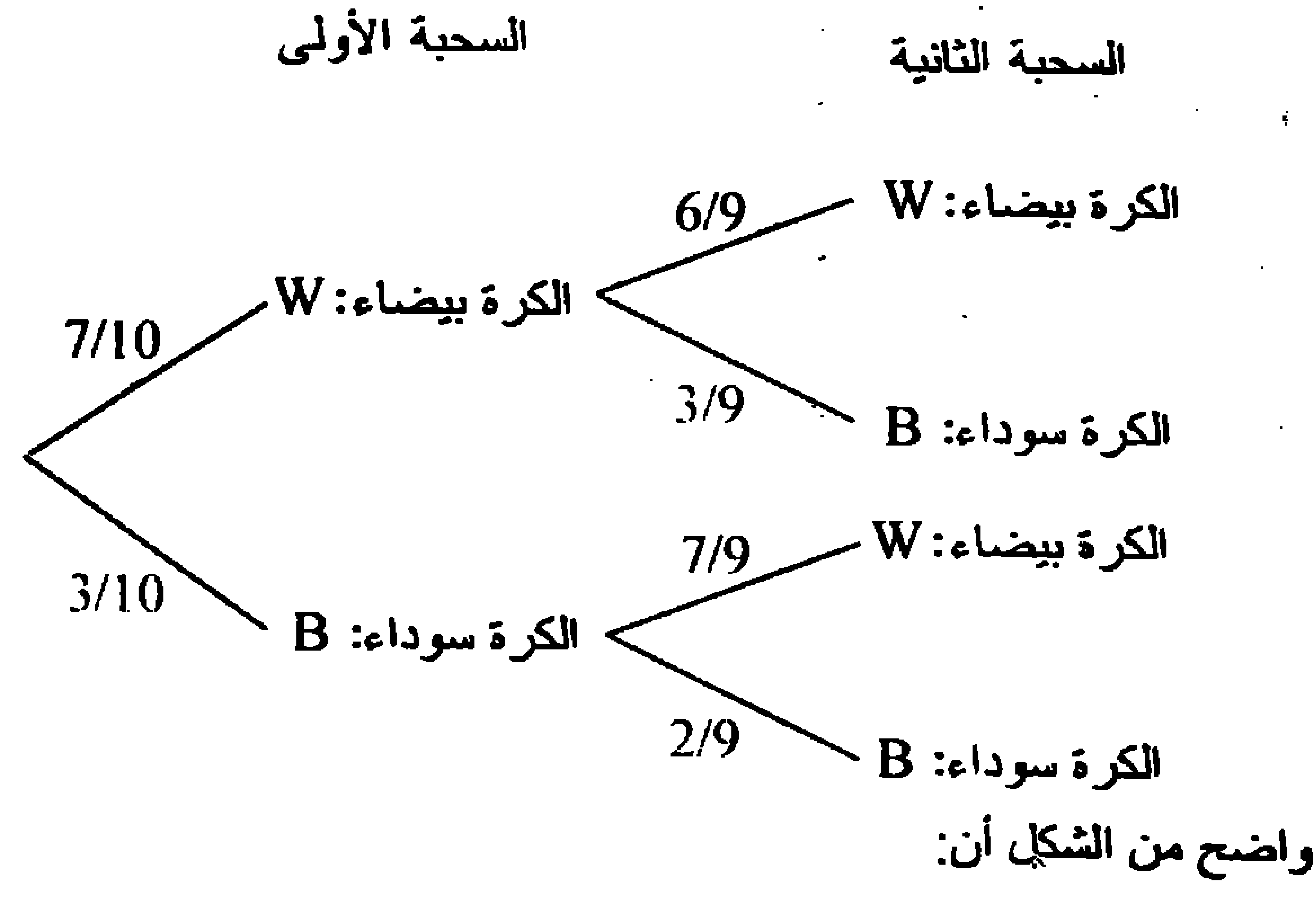
يوجد فى كيس 7 كرات بيضاء ، 3 كرات سوداء، سحبت كرتان عشوائيا دون إحلال. احسب الاحتمالات الآتية:

(أ) أن تكون الكرتان سوداوان (ب) أن تكون الكرتان بيضاوان.

(ج) أن تكون إحدى الكرتين بيضاء والأخرى سوداء.

الحـــل

ليكن W: الكرة بيضاء وليكن B: الكرة سوداء. نرسم شجرة الاحتمالات الآتية:



واضح من الشكل أن:

$$P(\mathrm{BB}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \quad ، \quad P(\mathrm{WW}) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

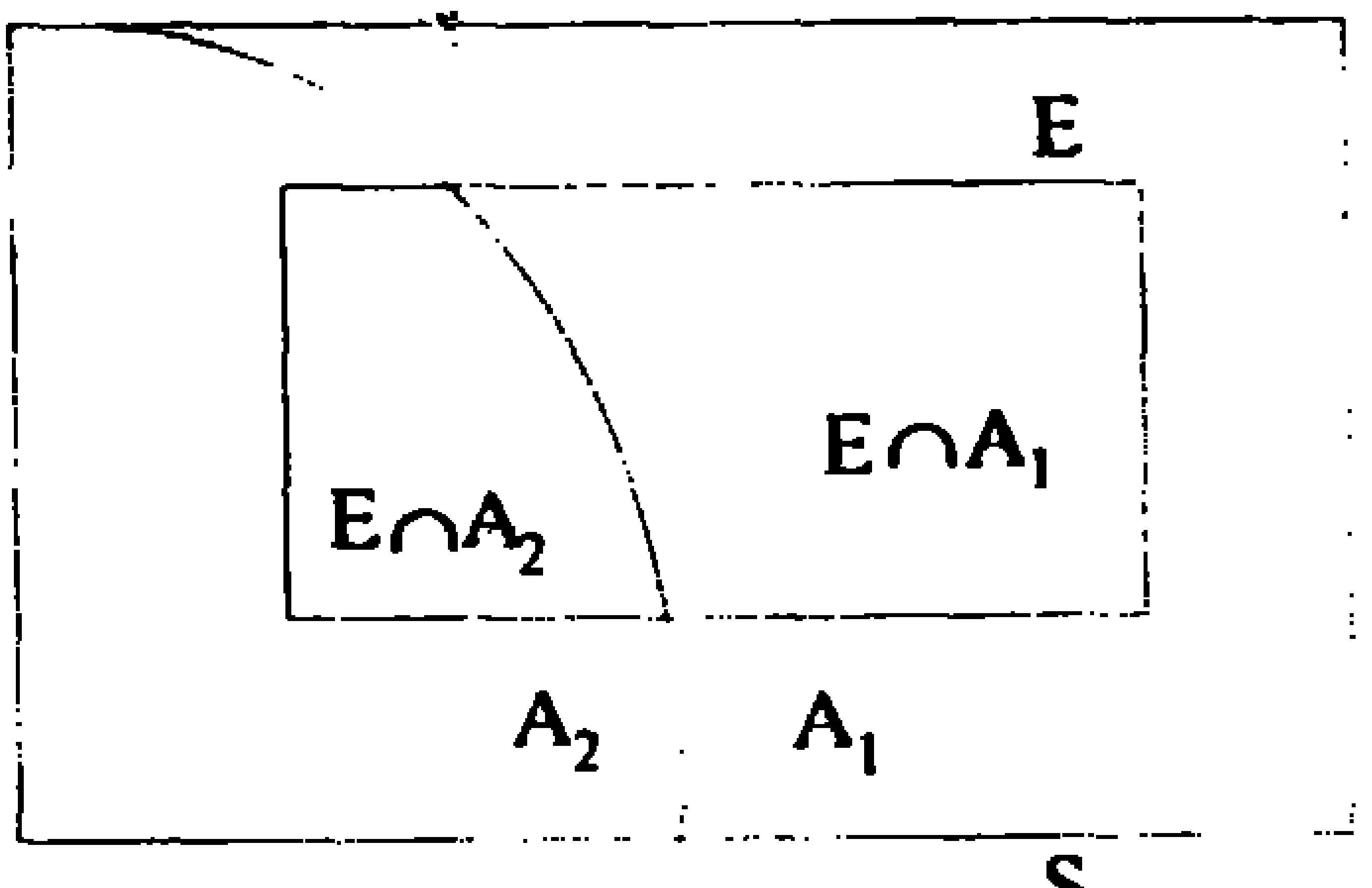
$$P(\mathrm{BW}) + P(\mathrm{WB}) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{15}$$

نظرية (٣)

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الحدثين المتنافيين والشاملين A_1،A_2 فإن:

$$P(E)=P(E\mid A_1)P(A_1)+P(E\mid A_2)P(A_2)$$

البرهان



من الشكل:

$$E=(E\cap A_1)\cup(E\cap A_2)$$

وحيث أن A_1،A_2 متنافيين إذن $E\cap A_1$ ، $E\cap A_2$ متنافيين.

$$\therefore\quad P(E)=P(E\cap A_1)+P(E\cap A_2)$$

$$=P(E\mid A_1)P(A_1)+P(E\mid A_2)P(A_2)$$

ملاحظة

يمكن تعميم النظرية لعدة أحداث المتنافية وشاملة A_1،A_2 ،...، A_n كالآتى:

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الأحداث المتنافية والشاملة A_1،A_2 ،...، A_n فإن:

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E\mid A_i)P(A_i)$$

البرهان

$$\because\quad E=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_k)$$

$$\therefore\quad P(E)=\sum_{i-1}^{n}(E\cap A_i)$$

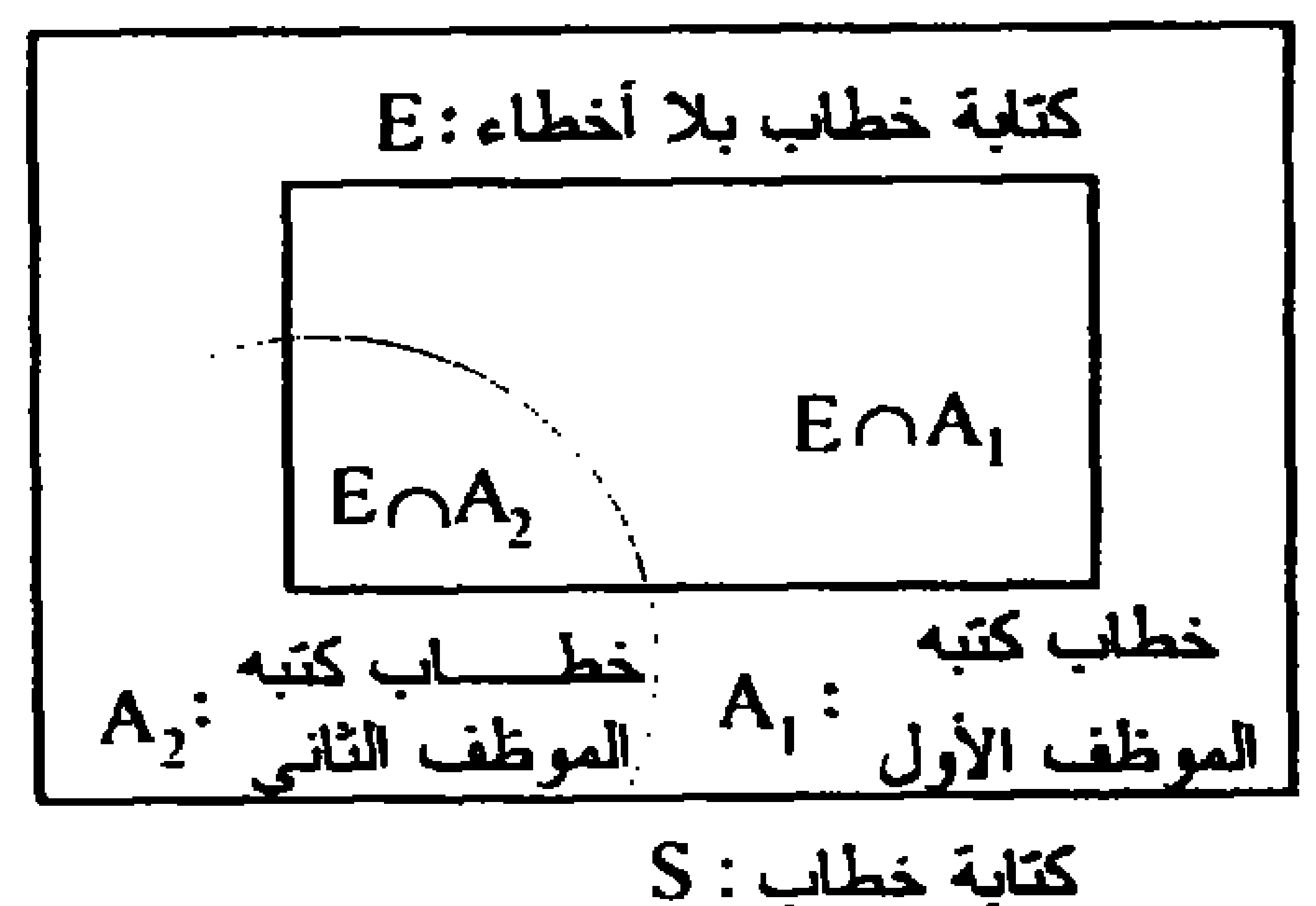
$$=\sum_{i=1}^{n}P(E\mid A_i)P(A_i)$$

مثال (١)

موظفان في سكرتارية مكتب يقومان بنسخ الخطابات على الآلة الكاتبة. فإذا كان الموظف الأول ينسخ % 80 من خطابات المكتب منها % 90 بلا أخطاء والموظف الثانى ينسخ % 20 من خطابات المكتب منها % 50 بلا أخطاء، فاحسب احتمال نسخ خطاب بلا أخطاء.

الحــــل

نفرض أن E يرمز للحدث "خطاب بلا أخطاء" وأن A_1 يرمز للحدث "الخطاب نَسَخَهُ الموظف الأول" وأن A_2 يرمز للحدث "الخطاب نسخه الموظف الثانى".
إذن A_1 ، A_2 حدثان متنافيان وشاملان أى $\{A_1,A_2\}$ تجزىء لفضاء العينة S "كتابة خطاب".



$$P(A_1)=0.8\ ,\ P(A_2)=0.2$$
$$P(E\,|\,A_1)=0.9\,,\ P(E\,|\,A_2)=0.5$$
$$P(E)=P(E\,|\,A_1)P(A_1)+P(E\,|\,A_2)P(A_2)$$
$$=0.9\times0.8+0.5\times0.2$$
$$=0.72+0.10=0.82$$

هذا؛ ونستطيع استخدام ما يسمى بـ **شجرة الاحتمالات** ***Probability tree*** لحل هذا المثال كالآتى:

كتابة خطاب
- 0.8 ← الموظف الأول: A_1
  - 0.9 ← خطاب بلا أخطاء: E
  - 0.1 ← خطاب بأخطاء: E'
- 0.2 ← الموظف الثانى: A_2
  - 0.5 ← خطاب بلا أخطاء : E
  - 0.5 ← خطاب بأخطاء: E'

من الشكل نجد أن:

$$P(E)=P(E\,|\,A_1)P(A_1)+P(E\,|\,A_2)P(A_2)$$
$$=0.9\times0.8+0.5\times0.2=0.72+0.10=0.82$$

مثال (٢)

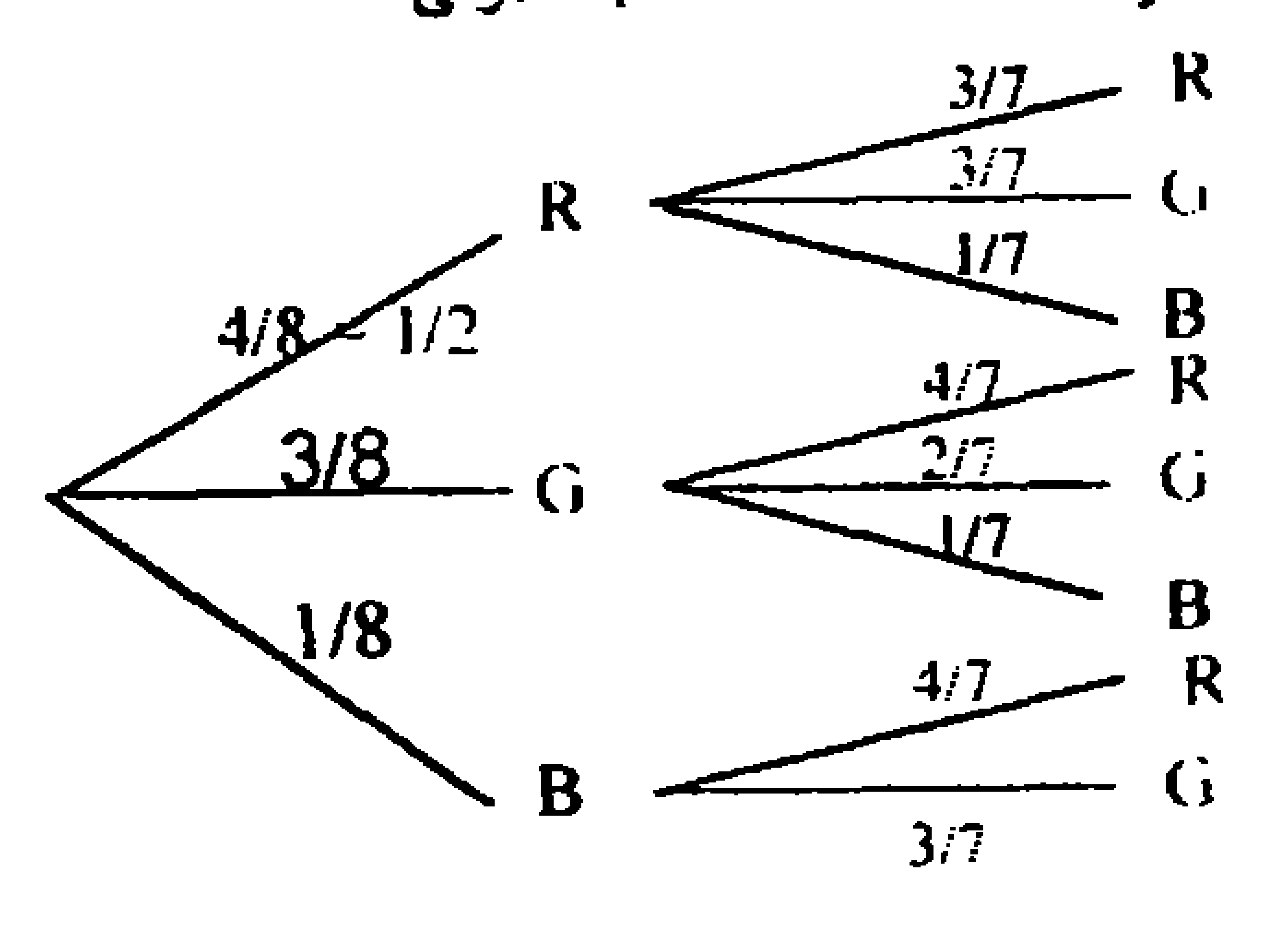
صندوق يحتوى على 4 كرات حمراء ، 3 خضراء ، كرة واحدة زرقاء. سحبت كرتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال. أوجد احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى خضراء.

الحـــل

نُعرّف الأحداث الآتية:

R: سحب كرة حمراء ، G: سحب كرة خضراء ، B: سحب كرة زرقاء.

ثم نرسم شجرة الاحتمالات الآتية:



احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى خضراء يساوى احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية خضراء + احتمال أن تكون الكرة الأولى خضراء والكرة الثانية حمراء. أى:

$$P(\mathrm{R}\,|\,\mathrm{G})P(\mathrm{G})+P(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{R})P(\mathrm{R})$$

$$=\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{7}$$

نظرية بييز Baye's Theorem

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الأحداث المتنافية والشاملة A_1، A_2، ...، A_n فإن:

$$P(\mathrm{A}_i\,|\,\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{A}_i)P(\mathrm{A}_i)}{P(\mathrm{E})}$$

البرهان

$$P(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{A}_i)P(\mathrm{A}_i)=P(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}_i)=P(\mathrm{A}_i\,|\,\mathrm{E})P(\mathrm{E})$$

$$\therefore\quad P(\mathrm{A}_i\,|\,\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{A}_i)P(\mathrm{A}_i)}{P(\mathrm{E})}$$

مثال (١)

فى مثال (١) السابق تم نسخ خطاب ووجد أنه بلا أخطاء ولكننا لا نعرف من هو الموظف الذى نسخ الخطاب. ما هو احتمال أن يكون الموظف الثانى هو الذى نسخه؟

الحـــل

$$P(\mathrm{A}_2\,|\,\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{A}_2)P(\mathrm{A}_2)}{P(\mathrm{E})}=\frac{0.5\times0.2}{0.82}\approx0.112$$

مثال (٢)

مؤسسة للصناعات الغذائية تنتج معلبات من خلال ثلاثة مصانع كما يلي:

المصنع الأول ينتج 30% من إنتاج المؤسسة منها 10% تالف.

المصنع الثاني ينتج 20% من إنتاج المؤسسة منها 5% تالف.

المصنع الثالث ينتج 50% من إنتاج المؤسسة منها 4% تالف.

اشترى شخص ما علبة من إنتاج المؤسسة. أوجد:

(أ) احتمال أن تكون العلبة تالفة.

(ب) احتمال أن تكون العلبة من إنتاج المصنع الثاني إذا علم أنها تالفة.

الحـــل

لنفرض الأحداث الآتية:

A_1 : العلبة من إنتاج المصنع الأول ،

A_2 : العلبة من إنتاج المصنع الثاني،

A_3 : العلبة من إنتاج المصنع الثالث ،

E : العلبة تالفة.

العلبة من إنتاج المصنع الأول A_1 | العلبة من إنتاج المصنع الثالث A_3 | $E\cap A_1$ | $E\cap A_3$ | $E\cap A_2$ | العلبة من إنتاج المصنع الثاني A_2 | العلبة تالفة E

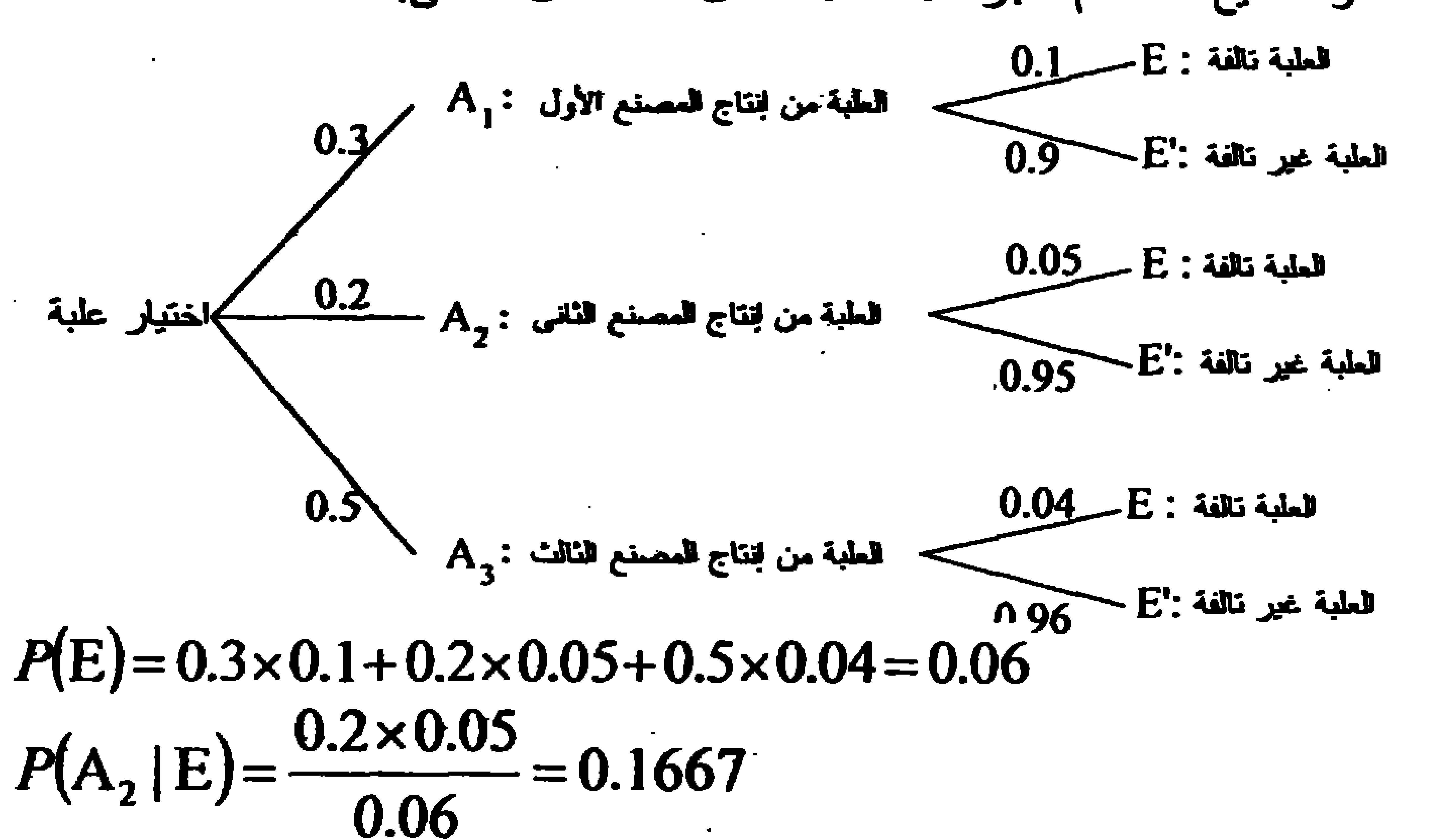
$$P(A_1)=0.3,\ P(A_2)=0.2\ ,\ P(A_3)=0.5$$

$$P(E|A_1)=0.1\ ,\ P(E|A_2)=0.05\ ،\ P(E|A_3)=0.04$$

$$P(E)=0.3\times0.1+0.2\times0.05+0.5\times0.04=0.06$$

$$P(A_2|E)=\frac{0.02\times0.05}{0.06}=0.1667$$

هذا؛ ونستطيع استخدام شجرة الاحتمالات لحل هذا المثال كالآتي:



$$P(E)=0.3\times0.1+0.2\times0.05+0.5\times0.04=0.06$$

$$P(A_2|E)=\frac{0.2\times0.05}{0.06}=0.1667$$

٣-٣ الأحداث المستقلة

يقال أن الحدثين A ، B مستقلين إذا كان احتمال حدوث أى منهما لا يتوقف على حدوث الآخر أى إذا كان:

$$P(A|B)=P(A)\ ,\ P(B|A)=P(B)$$

أى إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

وتكون الأحداث A_1، A_2، ...، A_n مستقلة إذا كانت مستقلة مثنى مثنى.

وبديهى أن الأحداث الأولية هى أحداث غير مستقلة حيث أنها متنافية.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات، ليكن A هو الحدث " أول رمية صورة "، وليكن B هو الحدث " ثانى رمية صورة "، وليكن C هو الحدث " صورتان متتاليتان ". ابحث استقلال الأحداث A ، B ، C.

الحــــل

فضاء العينة هو:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

$$A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}\ \therefore\ P(A)=\tfrac{1}{2}$$

$$B=\{HHH,HHT,THH,THT\}\ \therefore\ P(B)=\tfrac{1}{2}$$

$$C=\{HHT,THH\}\ \therefore\ P(C)=\tfrac{1}{4}$$

$$A\cap B=\{HHH,HHT\}\ \therefore\ P(A\cap B)=\tfrac{1}{4}=P(A)P(B)$$

إذن الحدثان A ، B مستقلان.

$$A\cap C=\{HHT\}\ \therefore\ P(A\cap C)=\tfrac{1}{8}=P(A)P(C)$$

إذن الحدثان A ، C مستقلان.

من ناحية أخرى:

$$B\cap C=\{HHT,THH\}\ \therefore\ P(B\cap C)=\tfrac{1}{4}\neq P(B)P(C)$$

إذن الحدثان B ، C غير مستقلين.

إذن الأحداث A ، B ، C غير مستقلة.

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، ليكن A هو الحدث "الرقم أقل من 5"، وليكن B هو الحدث " الرقم أكبر من 2 ". هل الحدثان A ، B مستقلان؟

الحـــــل

فضاء العينة هو:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1,2,3,4\} \quad \therefore \quad P(A) = \tfrac{2}{3}$$

$$B = \{3,4,5,6\} \quad \therefore \quad P(B) = \tfrac{2}{3}$$

$$A \cap B = \{3,4\} \quad \therefore \quad P(A \cap B) = \tfrac{1}{3} \neq P(A)P(B)$$

إذن A ، B حدثان غير مستقلين.

مثال (٣)

يصوب جنديان على هدف ما. فإذا كان احتمال إصابة الجندى الأول للهدف يساوى 0.25 ، احتمال إصابة الجندى الثانى للهدف يساوى 0.4، فما هو احتمال إصابة الهدف من كليهما ؟ وما احتمال إصابة الهدف من أحدهما أو كليهما؟

الحـــــل

نفرض أن A هو الحدث : إصابة الجندى الأول للهدف ، B هوالحدث: إصابة الجندى الثانى للهدف.

حيث أن A ، B مستقلين، إذن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.25 \times 0.4 = 0.1$$

إذن احتمال إصابة الهدف من كليهما = 0.1.

$$P(A \cup B) = 0.25 + 0.40 - 0.10 = 0.55$$

إذن احتمال إصابة الهدف من أحدهما أو كليهما = 0.55.

مثال (٤)

فى تجربة إلقاء عملة مرتين ليكن A:صورة فى الرمية الأولى ، B : صورة فى الرمية الثانية ، C : صورة واحدة بالضبط. أى أن:

$$A = \{HH, HT\} \quad , \quad B = \{HH, TH\} \quad , \quad C = \{HT, TH\}$$

$$A \cap B = \{HH\} \quad , \quad A \cap C = \{HT\} \quad , \quad B \cap C = \{TH\}$$

واضح أن الأحداث A ، B ، C مستقلة.

مثال (٥)

طائرة تعمل بمحركين مستقلين. فإذا كان احتمال أن يتعطل المحرك الأول يساوى 0.02 واحتمال أن يتعطل المحرك الثاني يساوى 0.015 فما احتمال أن تسير الطائرة بمحرك منهما على الأقل؟

الحـــــل

نفرض أن A هو الحدث: المحرك الأول يعمل ، B هو الحدث: المحرك الثانى يعمل.

$$\therefore \quad P(\mathrm{A}) = 1 - 0.02 = 0.98 \;,\; P(\mathrm{B}) = 1 - 0.015 = 0.985$$

وحيث أن A ، B مستقلين، إذن:

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{B}) = 0.98 \times 0.985 = 0.9653$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

$$= 0.98 + 0.985 - 0.9653 = 0.9997$$

إذن احتمال أن تسير الطائرة بمحرك منهما على الأقل يساوى 0.9997.

تمريـــــــن ٣

١. فى تجربة رمى حجرى نرد متمايزين معا، أحسب احتمال :

(أ) المجموع زوجى بشرط الحجر الأول 6

(ب) الحجر الثانى 6 بشرط المجموع زوجى

(ج) المجموع زوجى بشرط المجموع أقل من 5

(د) المجموع فردى بشرط الحجر الأول فردى

(هـ) الحجر الثانى 6 بشرط الحجر الأول 4

٢. فى تجربة رمى قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات، أحسب احتمال الحدث:

على الأقل صورتين بشرط الرمية الأولى صورة.

كيس يحتوى على 3 كرات بيضاء، كرتين سوداوين، 5 كرات حمراء. سحبت كرتان من الكيس دون إحلال. أحسب احتمال كل من النواتج الممكنة.

لأى حدث A احسب $P(A|A)$ ، $P(A'|A)$ ، $P(S|A)$ ، $P(A|A')$.

وجه صيادان نيرانهما إلى ثعلب. فإذا كانت فرصة كل منهما فى إصابة الثعلب هى 1/3 فاحسب احتمال إصابة الثعلب بفرض الاستقلال.

فى فضاء الاحتمال (S,P) حيث $A,B \in S$ وجد أن :

$$P(A) = 0.5 \text{ ، } P(B) = 0.6 \text{ ، } P(A \cup B) = 0.8$$

هل A ، B مستقلان؟

٧. إذا كان احتمال أن ينجح شخص فى الامتحان يساوى 1/4 فما هو احتمال نجاحه بعد أربع محاولات مستقلة؟

٨. طائرة ذات محركين يعملان بشكل مستقل. فإذا كان احتمال أن يعمل كل محرك أكثر من ألف ساعة دون إصلاح هو x ، أحسب احتمال أن يعمل محرك على الأقل أكثر من ألف ساعة كدالة فى x ووضح هذه الدالة بيانيا.

٩. مخرطتان A ، B تنتجان مسامير تعبأ أوتوماتيكيا فى صناديق. تنتج المخرطة A 1000 صندوق فى اليوم منها 7 % معيب وتنتج المخرطة B 3000 صندوق يوميا منها 4 % معيب. أختير أحد الصناديق عشوائيا من الإنتاج اليومى واختير منه مسمارا واحدا. ما هو احتمال أن يكون المسمار معيبا؟

وإذا افترض أن المسمار المختار قد وجد معيبا بالفعل فما هو احتمال أن يكون من إنتاج A ؟

١٠. فريق كرة قدم 60 % من مبارياته داخل البلاد والباقى فى الخارج، فإذا كان احتمال فوزه فى الداخل 0.7 واحتمال فوزه فى الخارج 0.4 فاحسب:

(أ) احتمال فوز الفريق فى مباراة اختيرت عشوائيا.

(ب) احتمال أن تكون المباراة داخلية إذا علم أنها انتهت بالهزيمة.

١١. إذا كان A ، B حدثين فى فضاء نواتج S وكان $P(\text{A}) = 0.2$ ، $P(\text{B}) = 0.4$
$P(\text{A} \cup \text{B}) = 0.5$. فأوجد كلامن:

(أ) $P(\text{A} \cap \text{B})$ (ب) $P(\text{A}' \cap \text{B})$

(ج) $P(\text{A} \cap \text{B}')$ (د) $P(A' \cap B')$

هل A ، B مستقلان؟ لماذا؟

١٢. إذا كان $P(\text{A}) = 0.35$ ، $P(\text{B}) = 0.72$ ، $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0.8$:

(أ) أوجد كلا من $P(\text{A}' \cap \text{B}')$ ، $P(\text{A} \cap \text{B})$ ، $P(\text{A}')$ ، $P(\text{B}')$.

(ب) هل A، B حدثان مستقلان؟ لماذا؟

(ج) الحدث A مجموعة جزئية من الحادث B.

١٣. إذا كان $P(\text{A}) = 0.25$ ، $P(\text{B}) = 0.4$ فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) $P(\text{A}')$ (ب) $P(\text{B}')$ (ج) $P(\text{A} \cup \text{B})$ إذا كان A ، B متنافيين

(د) $P(\text{A} \cup \text{B})$ إذا كان A ، B مستقلين.

١٤. إذا كان $P(\text{A}) = 0.2$ ، $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0.7$ فأوجد $P(\text{B})$ فى حالة:

(أ) A ، B مستقلان (ب) A ، B متنافيان (ج) $\text{A} \subset \text{B}$

١٥. من شجرة الاحتمالات الآتية أوجد:

(أ) $P(\text{C})$ ، $P(\text{D})$

(ب) $P(\text{C}|\text{A})$ ، $P(\text{D}|\text{A})$

(ج) $P(\text{C}|\text{B})$

(د) $P(\text{D}|\text{B})$

0.7 → A
- 0.9 → C
- 0.1 → D

0.3 → B
- 0.2 → C
- 0.8 → D

١٦. فى مدينة صغيرة وجد أن 20% من الأسر ليس لديهم أطفال ، 30% لديهم طفل واحد ، 20% لديهم طفلان ، 16% لديهم ثلاثة أطفال ، 8% لديهم أربعة أطفال ، 6% لديهم خمسة أطفال على الأقل. أوجد احتمال أن يكون لدى أسرة طفلان إذا علم أن لديها طفل واحد على الأقل.

١٧. من جدول الاحتمالات الآتية:

	E	F	G	المجموع
H	0.10	0.06	0.08	0.24
I	0.30	0.14	0.32	0.72
المجموع	0.40	0.20	0.40	1.00

أوجد كلا من:

(أ) $P(\mathrm{E})$ (ب) $P(\mathrm{G})$ (ج) $P(\mathrm{H})$

(د) $P(\mathrm{I})$ (هـ) $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{I})$ (و) $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{H})$

(ز) $P(\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$ (ح) $P(\mathrm{G} \cap \mathrm{I})$

١٨. فى فراغ العينة:

$$S = \{♠, ♣, ♥, ♦\}$$

لتكن:

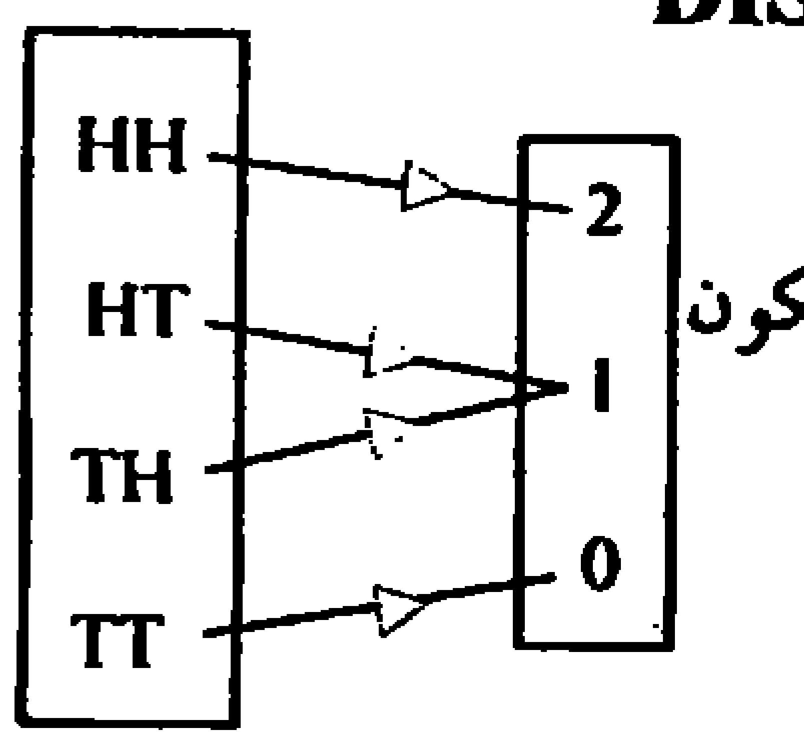
$$A = \{♠, ♣\} \;,\; B = \{♠, ♥\} \;,\; C = \{♠, ♦\}$$

هل هذه الأحداث مستقلة؟

١٩. يمكن إصابة طائرة معادية بنوعين من الصواريخ بالاحتمالات الآتية: احتمال إصابة الطائرة بالصاروخ A يساوى 0.95 ، احتمال إصابة الطائرة بالصاروخ B يساوى 0.90 . فإذا أطلق الصاروخان فما هو احتمال إصابة الطائرة بأحد الصاروخين على الأقل؟

٢٠. منتج يعتمد فى تكوينه على ثلاثة عناصر مستقلة، ويعتبر المنتج معيبا إذا كان واحد أ
أكثر من هذه العناصر معيبا. فإذا كان احتمال أن تكون هذه العناصر معيبة يساو
010 ، 0.02 ، 0,01 على التوالى فأوجد احتمال أن يكون المنتج معيبا. وإذا وجد أ
المنتج معيبا فما احتمال أن يكون السبب هو العنصر الثالث؟

الدرس الرابع
المتغير العشوائى المتقطع
DISCRETE RANDOM VARIABLES



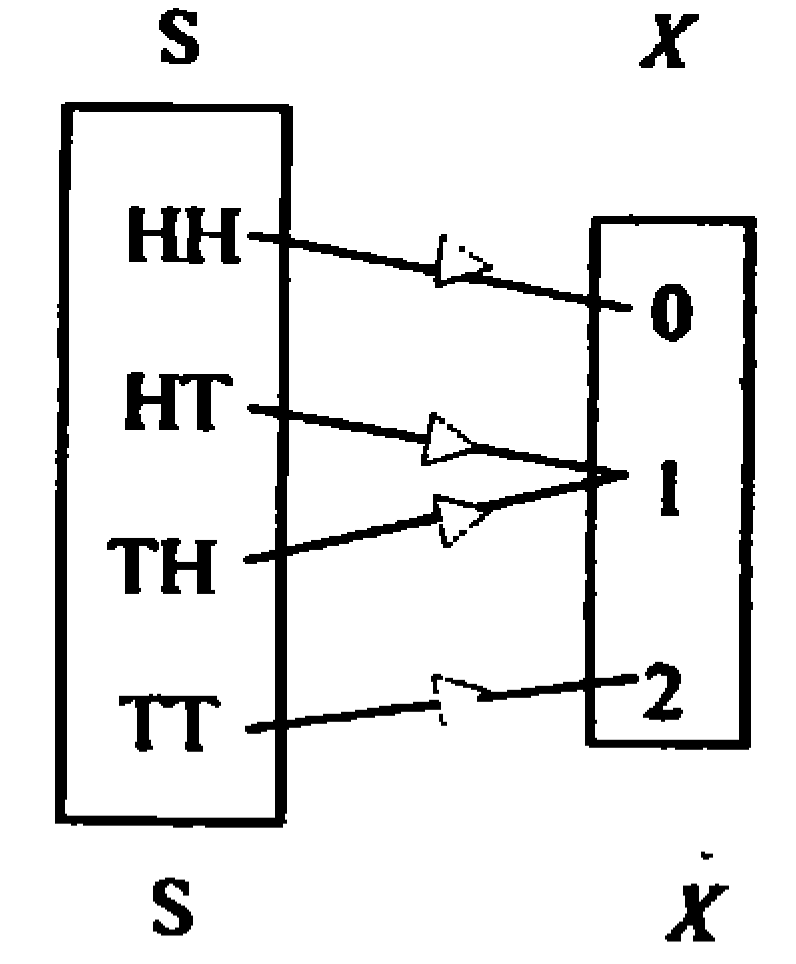
١ المتغيرات العشوائية Random Variables

فى معظم الأحيان لا نهتم بنتائج التجربة العشوائية ذاتها، ولكن يكون اهتمامنا منصبا على أعداد حقيقية مرتبطة بهذه النواتج.

مثال (١)

لنأخذ تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين حيث فضاء النواتج هو:

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}$$



وليكن اهتمامنا منصبا على معرفة عدد الصور التى تظهر على وجه العملة. فإننا نحصل على متغير X موضحا بالشكل الآتى:

مثال (٢)

لنأخذ نفس تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين وليكن اهتمامنا منصبا على معرفة عدد مرات الكتابة التى تظهر على وجه العملة. فإننا نحصل على متغير X موضحا بالشكل الآتى:

مثال (٣)

لنأخذ نفس تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين وليكن اهتمامنا منصبا على تشابه واختلاف وجهى العملة. فإننا نحصل على متغير عشوائى X موضحا بالشكل الآتى:

HH TT	→ 1
HT TH	→ 0

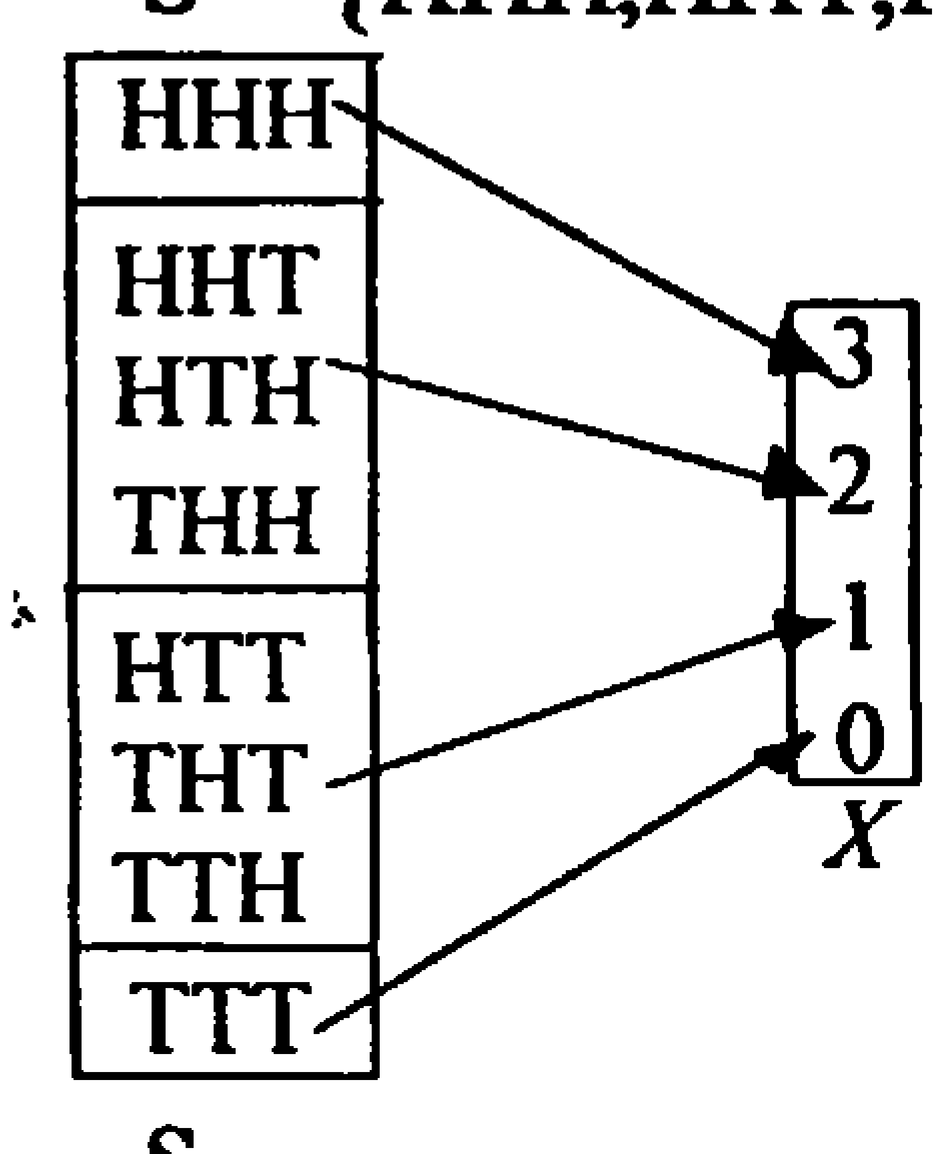
S فضاء الأحداث — X

المتغير X يمثل تشابه واختلاف الوجهين (العدد ١ يدل على التشابه)

مثال (٤)

فى تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات حيث فضاء النواتج:

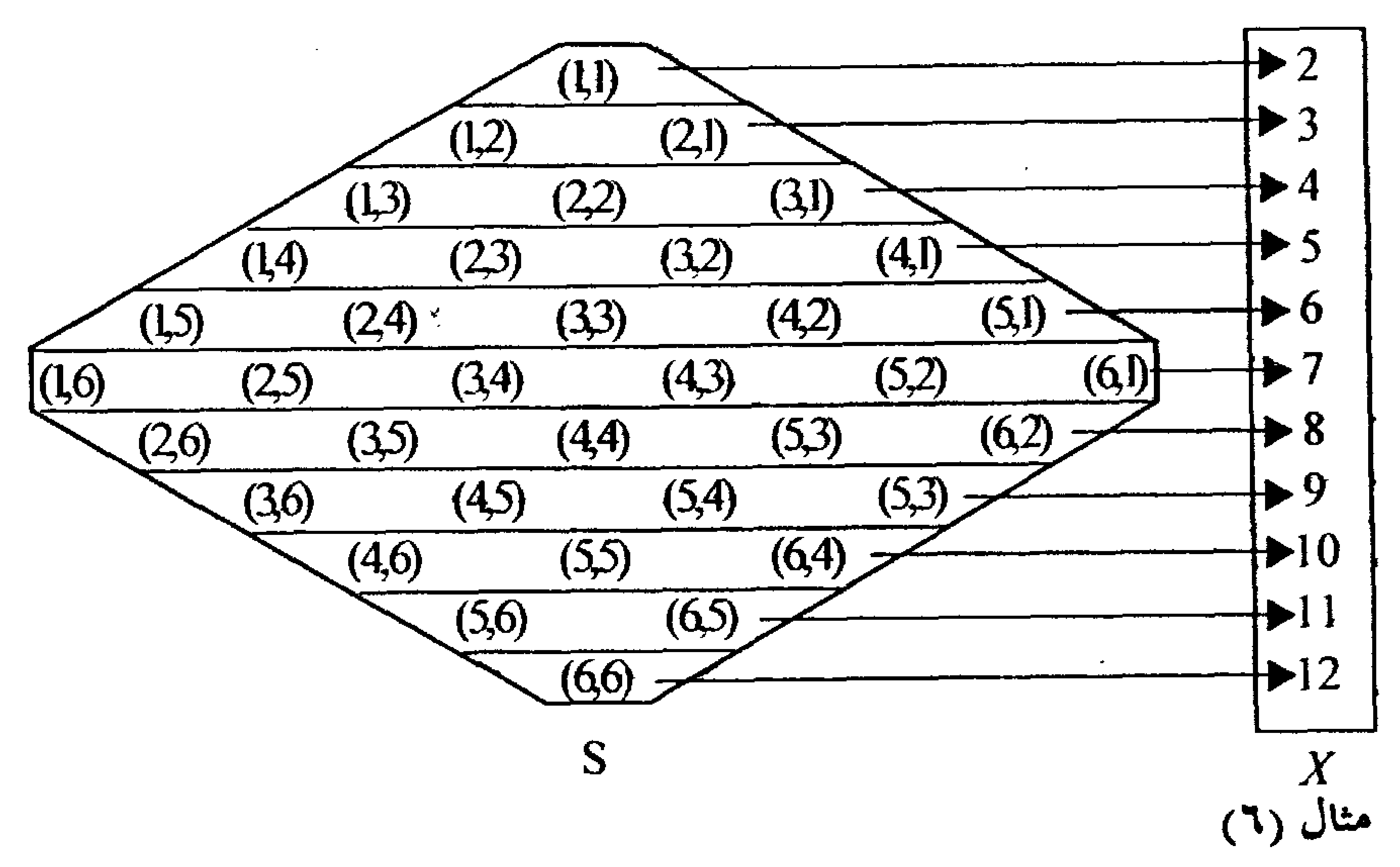
$$S = \{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$



ليكن المتغير العشوائى X هو عدد الصور. فإننا نحصل على متغير عشوائى X موضحا بالشكل الآتى:

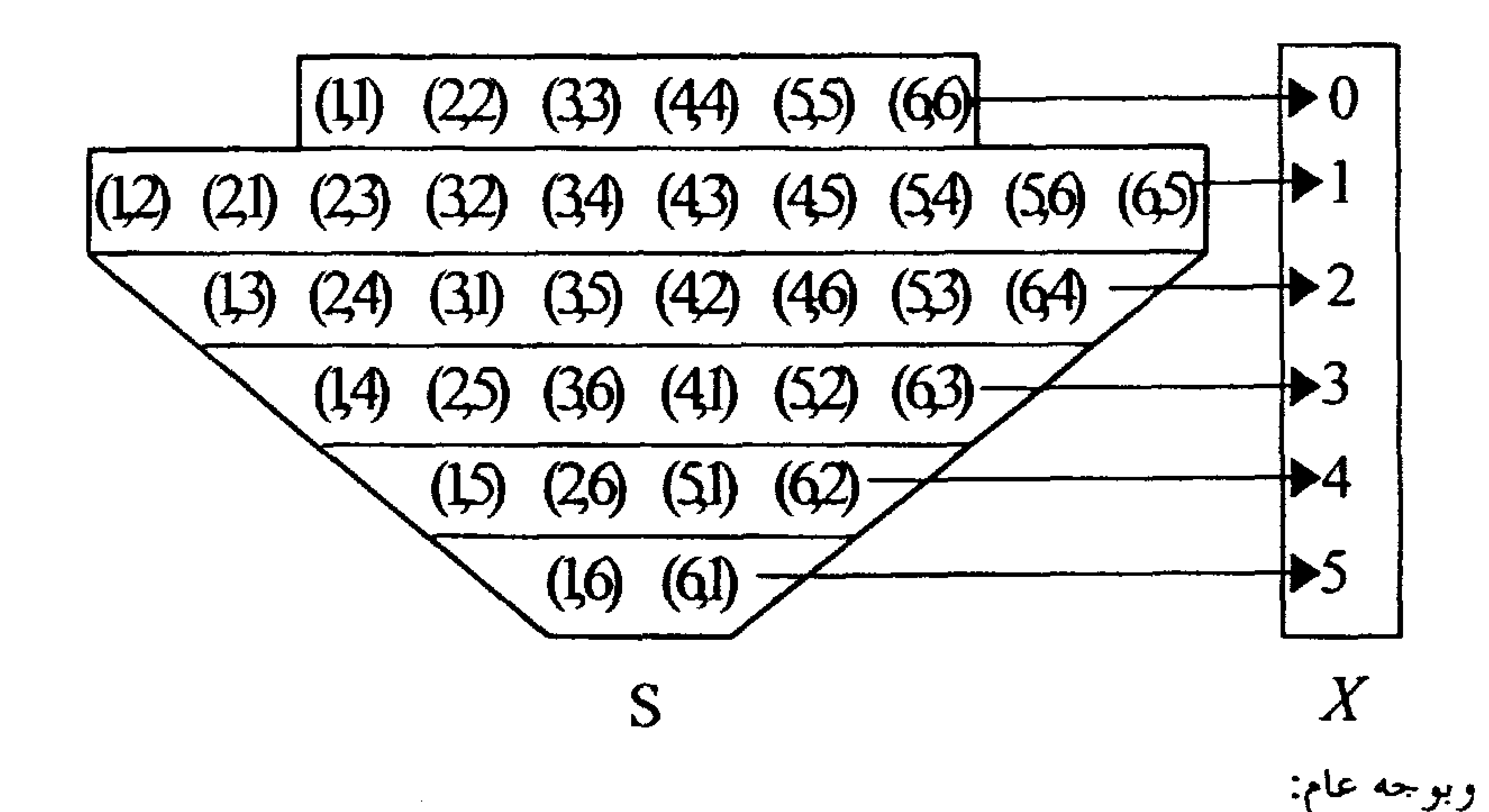
مثال (٥)

فى تجربة إلقاء زهر الطاولة مرتين ليكن المتغير العشوائى X يدل على مجموع الوجهين. يبين الشكل الأحداث وقيم المتغير العشوائى المناظرة:



مثال (٦)

فى نفس تجربة إلقاء زهر الطاولة مرتين ليكن المتغير العشوائى X يدل على القيمة المطلقة للفرق بين الوجهين. يبين الشكل الآتى الأحداث وقيم المتغير العشوائى المناظرة:



وبوجه عام:

> إذا كان S فضاء نواتج تجربة عشوائية فإن أى دالة $f: S \to R$ تسمى متغيرا عشوائيا معرفا على S إذا كان معكوس أى قيمة من قيم الدالة f حدث من أحداث S.

٢ المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة

Discrete and Continuous Random Variables

يقال لمتغير عشوائى أنه **متقطع** (منفصل - وثاب) ***discrete*** إذا كان مداه مجموعة محدودة أو قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ويقال لمتغير عشوائى أنه **متصل** ***continuous*** إذا كان مداه فترة (مغلقة أو مفتوحة) أى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

وفى كل الأمثلة السابقة كان المتغير العشوائى متقطعا والمثالين الآتيين يعطيان متغيرا عشوائيا متصلا:

مثال (١)

فى تجربة اختيار نقطة داخل الفترة $[a\ ,\ b] \subset \mathrm{R}$ وكان المتغير العشوائى يعبر عن بعد النقطة $x \in [a\ ,\ b]$ عن نقطة الأصل فإن مدى هذا المتغير العشوائى هو الفترة $[|a|\ ,\ |b|]$ أو $[|b|\ ,\ |a|]$. لذلك فهو متغير عشوائى متصل.

مثال (٢)

فى تجربة قياس وزن طالب من طلاب كلية من الكليات، إذا كان X يمثل وزن الطالب، فإن X يكون متغيرا عشوائيا يأخذ أي قيمة في الفترة الحقيقية $[a,b]$ حيث a أقل وزن ، b أكبر وزن.

٣ دالة التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع

Probability Distribution Function of a Discrete Random Variable

فيما يلى نعطى تعريفا لدالة التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع X:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطع مداه Range X، فإن تعيين عدد يُعَبِّر عن احتمال وقوع الحدث E (الذى تعبر عنه القيمة x) يُعَرِّف دالة $f:$ Range $X \to [0,1]$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالى ***probability distribution function*** وذلك كالآتى:

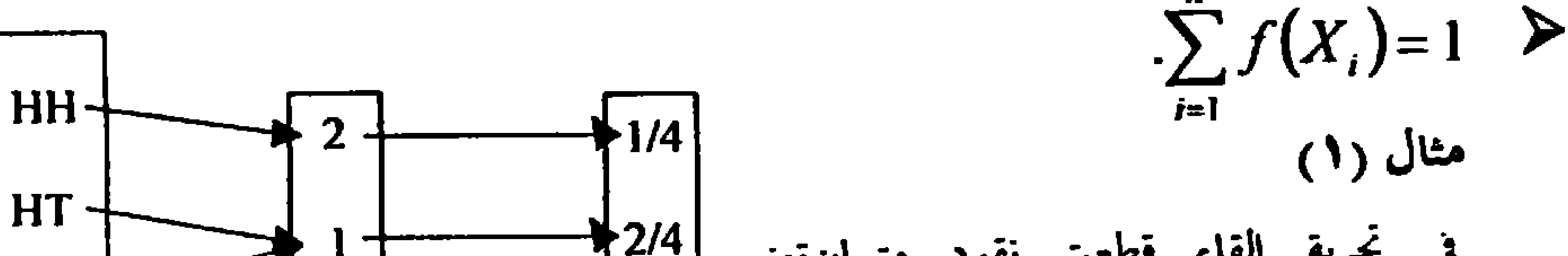
$$f(x) = P(X = x) = P(\mathrm{E})$$

وتسمى مجموعة الأزواج المرتبة $(x,\ f\ (x))$ توزيعا احتماليا ***probability distribution*** للمتغير العشوائى X.

١-٣ خواص دالة التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع

لنفرض X متغيرا عشوائيا متقطعا مداه المجموعة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، ولنفرض أننا أُعطينا جدولا لأزواج القيم $(X_i, f(X_i))$ ، حيث $i = 1,2,\ldots,n$. لكى نتأكد أن الجدول يمثل توزيعا احتماليا فإن الدالة $f(X_i)$ لابد أن تحقق الخاصيتين الآتيتين:

- لكل $i = 1,2,\ldots,n$ فإن $f(X_i) \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = 1$.



مثال (١)

فى تجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائى الذى يدل على عدد مرات ظهور الصورة فإننا نحصل على الشكل الآتى:

لذا فإن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يُعَبِّرُ عن عدد الصور يمثل بالجدول الآتى:

X	0	1	2
$P(X)$	1/4	1/2	1/4

كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

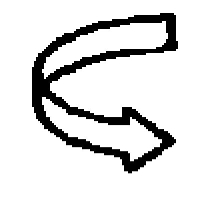
مجموع قيم $P(X)$ يساوى 1.

إذن الجدول يمثل توزيع احتمالى.

التمثيل البيانى لهذا التوزيع هو :

مثال (٢)

فى تجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائى الذى يدل على عدد مرات ظهور الصورة فإننا نحصل على الشكل الآتى:



لذا فإن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يُعَبِّرُ عن عدد الصور يمثل بالجدول الآتى:

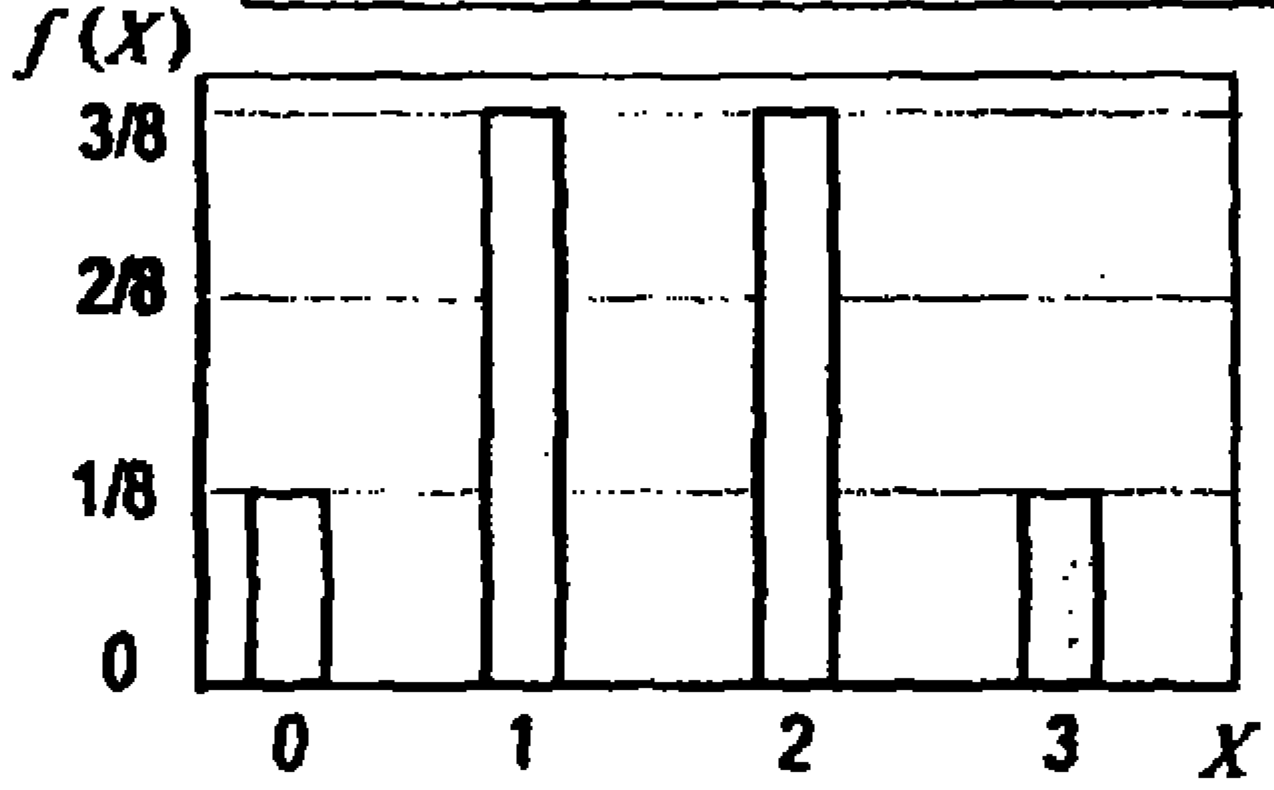
X	0	1	2	3
$P(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

مجموع قيم $P(X)$ يساوى 1.

إذن الجدول يمثل توزيع احتمالى.

التمثيل البيانى لهذا التوزيع هو :



مثال (٣)

فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائى الذى يدل على مجموع الوجهين فإننا نحصل على الشكل الآتى:

S	X	P (X)
{ (1,1) }	2	1/36
{ (1,2) , (2,1) }	3	2/36
{ (1,3) , (2,2) , (3,1) }	4	3/36
{ (1,4) , (2,3) , (3,2) , (4,1) }	5	4/36
{ (1,5) , (2,4) , (3,3) , (4,2) , (5,1) }	6	5/36
{ (1,6) , (2,5) , (3,4) , (4,3) , (5,2) , (6,1) }	7	6/36
{ (2,6) , (3,5) , (4,4) , (5,3) , (6,2) }	8	5/36
{ (3,6) , (4,5) , (5,4) , (6,3) }	9	4/36
{ (4,6) , (5,5) , (6,4) }	10	3/36
{ (5,6) , (6,5) }	11	2/36
{ (6,6) }	12	1/36

لذا فإن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يُعَبِّرُ عن عدد الصور يمثل بالجدول الآتى:

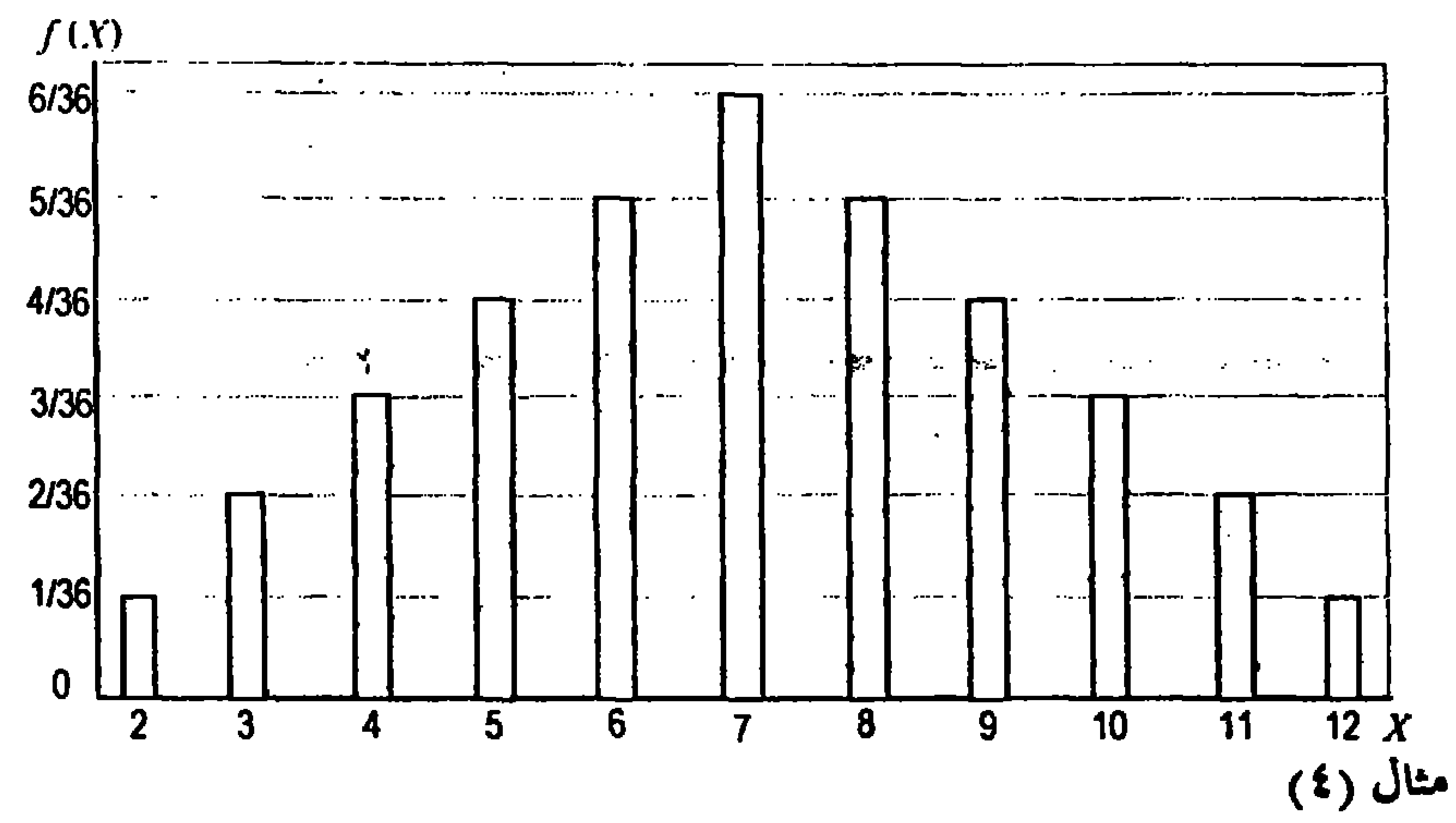
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

مجموع قيم $P(X)$ يساوى 1.

إذن الجدول يمثل توزيع احتمالى.

التمثيل البيانى لهذا التوزيع هو :



مثال (٤)

اشترى طفل ثلاث بالونات. فإذا كان احتمال أن تكون البالونة صالحة يساوى 0.8 فأوجد التوزيع الاحتمالى لعدد البالونات الصالحة.

الحـــــل

إذا رمزنا إلى البالونة الصالحة بالرمز T ولغير الصالحة بالرمز F فإن:

$$P(\text{T}) = 4/5 \;,\; P(\text{F}) = 1/5$$

ويكون فضاء النواتج هو:

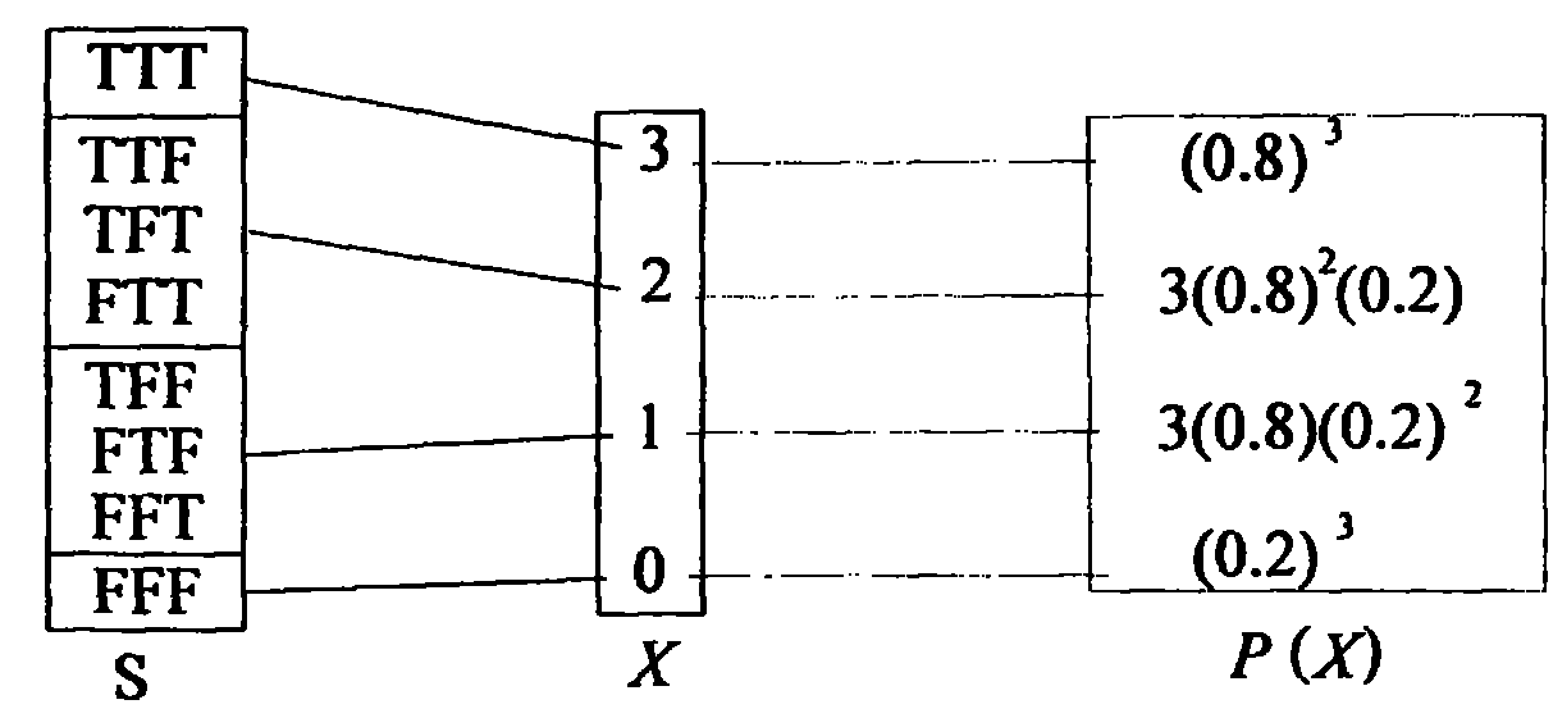
$$S = \{TTT, TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, FFF\}$$

نستطيع رسم الشجرة الآتية :

البالونة الأولى   البالونة الثانية   البالونة الثالثة

$$P(TTT) = 0.8\times0.8\times0.8 = (0.8)^3$$
$$P(TTF) = 0.8\times0.8\times0.2 = (0.8)^2(0.2)$$
$$P(TFT) = 0.8\times0.2\times0.8 = (0.8)^2(0.2)$$
$$P(TFF) = 0.8\times0.2\times0.2 = (0.8)(0.2)^2$$
$$P(FTT) = 0.2\times0.8\times0.8 = (0.8)^2(0.2)$$
$$P(FTF) = 0.2\times0.8\times0.2 = (0.8)(0.2)^2$$
$$P(FFT) = 0.2\times0.2\times0.8 = (0.8)(0.2)^2$$
$$P(FFF) = 0.2\times0.2\times0.2 = (0.2)^3$$

إذا أخذنا المتغير العشوائى X ليمثل عدد البالونات الصالحة فإننا نحصل على الشكل الآتى:



الجدول الآتى يبين التوزيع الاحتمالى المطلوب:

X	0	1	2	3
$f(X)$	0.008	0.096	0.384	0.512

واضح أن كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة وأن مجموع قيم $P(X)$ يساوى 1 مما يدل على أن الجدول يمثل دالة توزيع احتمالى.

٤ دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائى متقطع

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا دالته الاحتمالية f. فإن دالة التوزيع التراكمية F لنفس المتغير تُعَرَّف كما يلى:

$$F(x) = f(X \leq x)$$

أى أن:

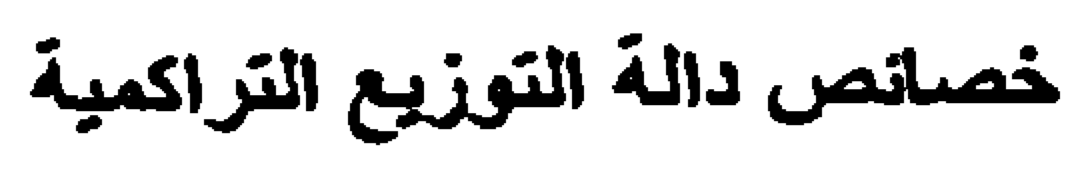
$$F(x) = \sum_{X_i \leq x} f(X_i)$$

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة تكون دالة التوزيع الاحتمالى $f(X)$ ودالة التوزيع الاحتمالى التراكمية مبينتين بالجدول الآتى:

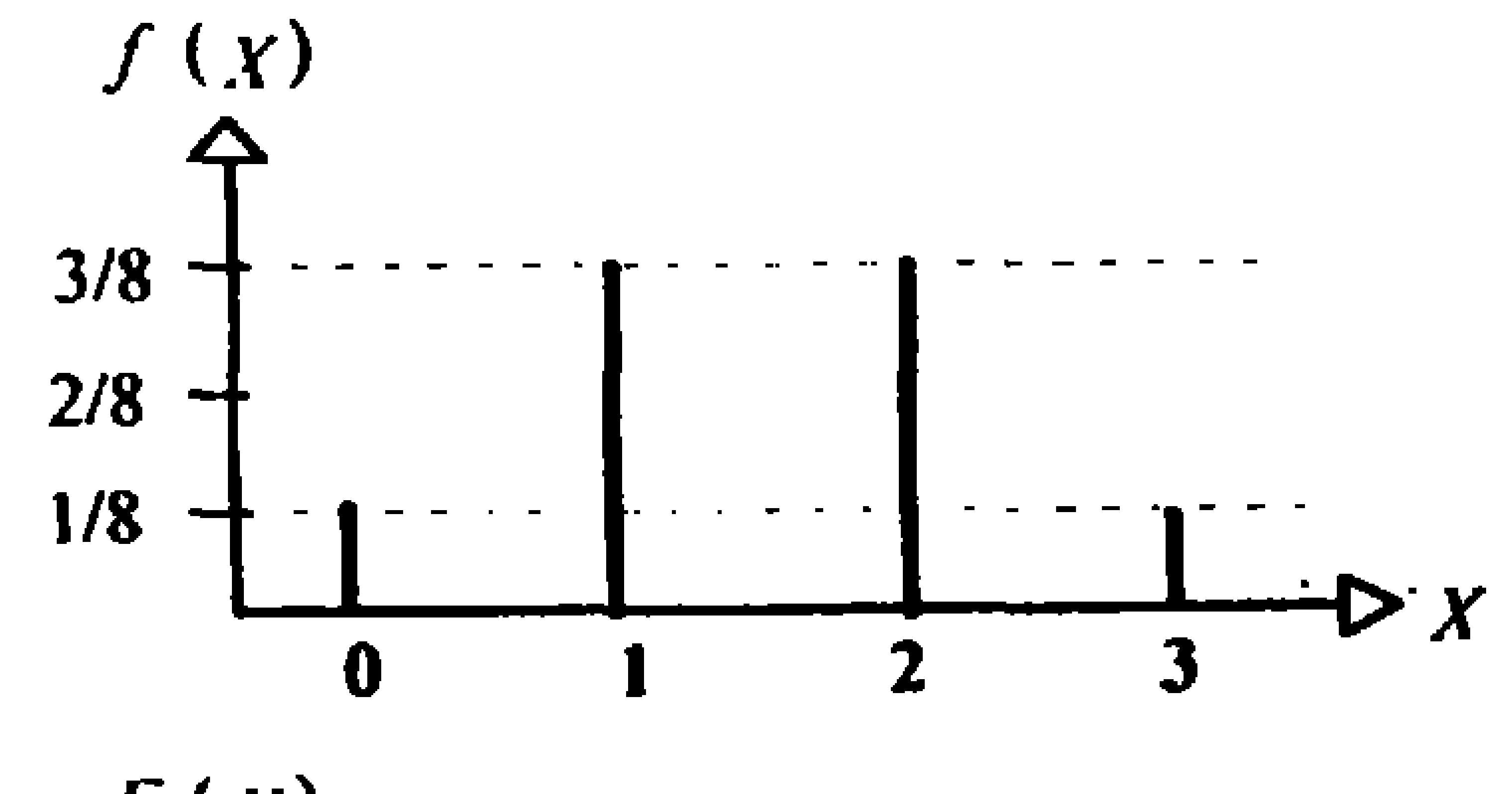
X	0	1	2	3
$f(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(X)$	1/8	4/8	7/8	1

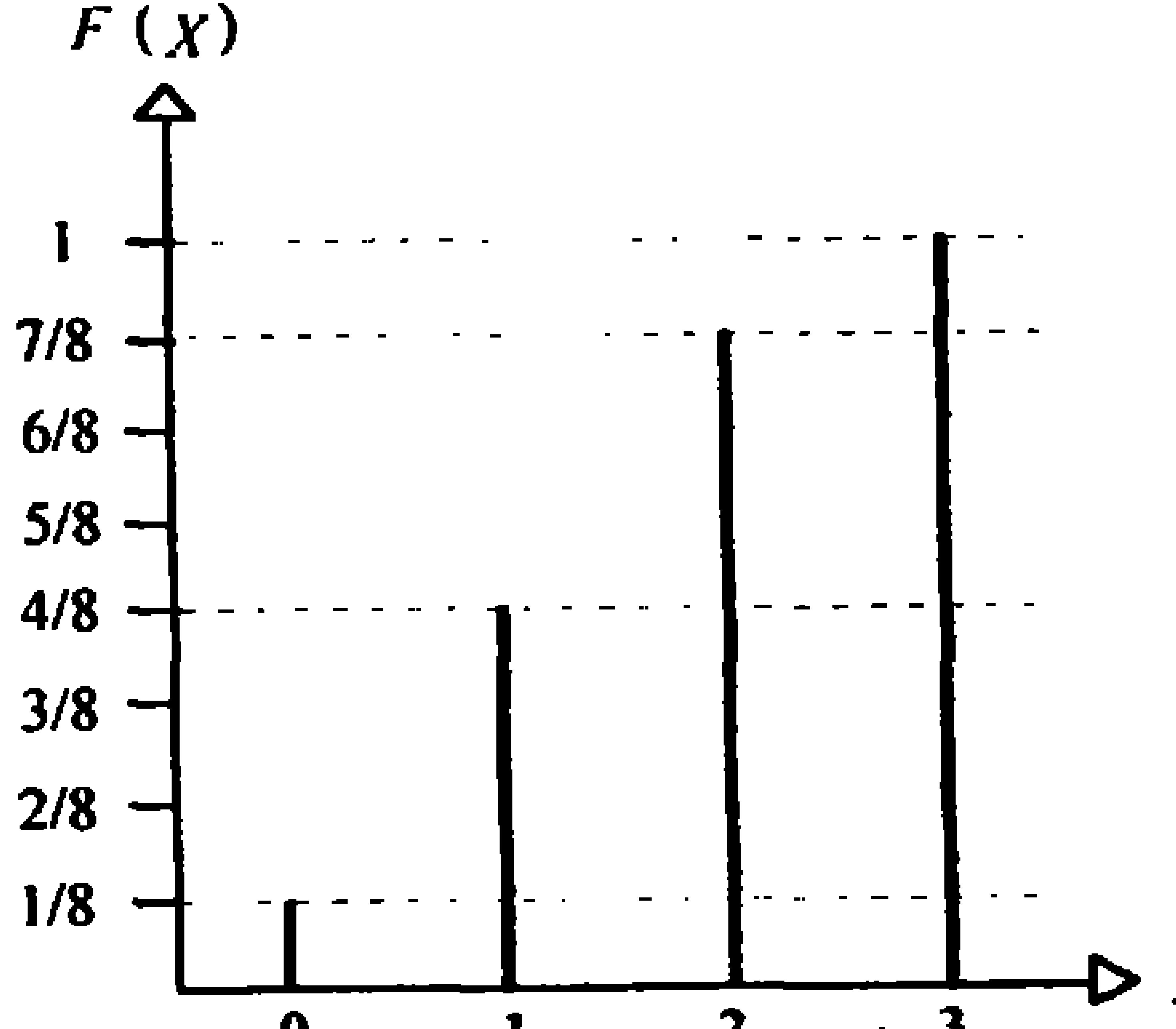
ويبين الشكل الآتى منحنى دالتى التوزيع والتوزيع التراكمية للمتغير العشوائى المذكور.



دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائي متقطع لها الخصائص الآتية:

- F دالة غير تناقصية. أي أن :
$$X_1 \le X_2 \Rightarrow F(X_1) \le F(X_2)$$
- $F(-\infty)=0 \, , F(\infty)=1$
- $f(X_i)=F(X_i)-F(X_{i-1})$





والخاصية الأخيرة تمكننا من تعيين الدالة الاحتمالية f إذا علمنا دالة التوزيع التراكمية F. ففى المثال السابق:

$$f(1)=F(1)-F(0)=\tfrac{4}{8}-\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{8}$$
$$f(2)=F(2)-F(1)=\tfrac{7}{8}-\tfrac{4}{8}=\tfrac{3}{8}$$
$$f(3)=F(3)-F(2)=1-\tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{8}$$

مثال (٢)

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا دالة توزيعه التراكمية معطاه بالجدول الآتى:

X	1	2	3	4	5	6
$F(X)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

أوجد دالة التوزيع الاحتمالية.

الحـــل

X	1	2	3	4	5	6
$F(X)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1
$f(X)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

مثال (٣)

أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائى المتقطع X الذى دالة توزيعه الاحتمالية معطاه كالآتى:

$$f(x)=(\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4})^{x-1}, x=1,2,\cdots$$

الحـــــل

$$f(X)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{X-1},\ X=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow\ f(1)=\left(\frac{1}{4}\right),\quad f(2)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right),\quad f(3)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{2},\ \cdots$$

$$\therefore\ F(X)=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{X-1}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left[1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{X-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1-(\frac{3}{4})^{X}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=1-(3/4)^{X}$$

٥ التوقع لمتغير عشوائى متقطع Expectation of a Discrete Random Variable

لنفرض أننا ألقينا زهر طاولة 36 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى فى كل مرة ووجدنا الجدول التكرارى الآتى:

الوجه	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
القيمة X_i	1	2	3	4	5	6
التكرار f_i	5	6	8	7	4	6

نستطيع حساب المتوسط الحسابى لقيم X كالآتى:

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{6}X_i(f_i/N)$$

$$=(1\times5+2\times6+3\times8+4\times7+5\times4+6\times6)/36\approx3.472$$

[لاحظ أن f_i/N هو التكرار النسبى لعدد مرات ظهور الوجه].

لنفرض أننا لم نكتف بإلقاء الزهر 36 مرة وألقيناه 360 مرة ووجدنا الآتى:

القيمة X_i	1	2	3	4	5	6
التكرار f_i	58/360	62/360	57/360	63/360	59/360	61/360

فى هذه الحالة فإن المتوسط الحسابى يصبح:

$$\overline{X} = (1\times58+2\times62+3\times57+4\times63+5\times59+6\times61)/360 \approx 3.517$$

أما إذا كررنا الإلقاء عددا كبيرا جدا من المرات فقد لانستطيع حساب المتوسط بنفس الطريقة ولكن إذا استبدلنا التكرار النسبى باحتمال ظهور الوجه وهو فإن المتوسط يصبح:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{6} X_i P(X_i) = \frac{(1+2+3+4+5+6)\times 1}{6} = 3.5$$

وهذا ما يعرف بـــ القيمة المتوقعة ***expected value*** للمتغير العشوائى X وتمثل القيمة التى تتمركز عندها قيم المتغير العشوائى. وسنعطى التعريف الآتى:

ليكن X متغيرا عشوائيا مداه $X_1, X_2, \ldots X_n$ ولتكن f دالة توزيع احتمالى للمتغير X. فإن القيمة المتوقعة ***expected value*** أو μ للتوزيع الاحتمالى $(X_i, f(X_i))$ هى: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i f(X_i)$

هذا؛ ويناظر القيمة المتوقعة فى نظرية الاحتمالات القيمة المتوسطة (المتوسط الحسابى) فى

مثال (١)

احسب التوقع الرياضى للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء عملة معدنية مرتين حيث المتغير العشوائى X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحــــل

من جدول التوزيع الاحتمالى:

X_i	0	1	2	المجموع
$P(X_i)$	1/4	1/2	1/4	1

نجد أن:

$$\mu = \sum_{i=0}^{2} X_i P(X_i) = 0\times P(0) + 1\times P(1) + 2\times P(2) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} = 1$$

مثال (٢)

احسب التوقع الرياضى للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات حيث المتغير العشوائى X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحــــل

من جدول التوزيع الاحتمالى:

X_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

نجد أن:

$$\mu = \sum_{i=0}^{3} X_i P(X_i) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3)$$
$$= 1 \times \tfrac{3}{8} + 2 \times \tfrac{3}{8} + 3 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2}$$

مثال (٣)

احسب التوقع الرياضى للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء زهرى نرد متمايزين حيث المتغير العشوائى هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحـــــل

من جدول التوزيع الاحتمالى:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

نجد أن:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=2}^{12} X_i f(X_i)$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{36}\right) + 3\left(\tfrac{2}{36}\right) + 4\left(\tfrac{3}{36}\right) + 5\left(\tfrac{4}{36}\right) + 6\left(\tfrac{5}{36}\right) + 7\left(\tfrac{6}{36}\right)$$
$$+ 8\left(\tfrac{5}{36}\right) + 9\left(\tfrac{4}{36}\right) + 10\left(\tfrac{3}{36}\right) + 11\left(\tfrac{2}{36}\right) + 12\left(\tfrac{1}{36}\right) = 7$$

خصائص التوقع لمتغير عشوائى متقطع

للتوقع الرياضى لدالة الخصائص الآتية:

- لأى مقدار ثابت C فإن $E(C) = C$
- لأى ثابتين a ، b فإن $E(aX + b) = a\,E(X) + b$

٦ التباين والانحراف المعيارى Variance and Standard Deviation

فى معظم الأحيان تؤخذ القيمة المتوقعة أساسا لاتخاذ القرارات فى ظل عدم تأكدنا من النتائج. ولكن قد يحدث أحيانا أن تتفق مجموعتان من البيانات فى قيمتهما المتوقعة ولكن مفردات إحداهما تكون أكثر تشتتا من مفردات الأخرى. من هنا ظهرت أهمية وجود مقياس آخر يقيس مدى تشتت المفردات.

وهذا المقياس هو التباين الذى يقيس انتشار (تشتت) قيم المتغير العشوائى حول الوسط الحسابى ويُعرَّف كالآتى:

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا دالته الاحتمالية f .فإن التباين **variance** هو:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 f(X_i)$$

ويُعَرَّف الانحراف المعيارى σ بأنه يساوى الجذر التربيعى للتباين. أى:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 f(X_i)}$$

مثال (١)

يريد مدير الاستثمار لأحد البنوك اختيار شراء أسهما وكان المعروض نوعان منهما والجدولان الآتيان يمثلان التوزيع الاحتمالى لأسعار النوعين

احسب التوقع والتباين لكل نوع. لأى نوع يفضل أن يكون الشراء؟

النوع X	
السعر (جنيه)	الاحتمال
10	0.10
20	0.25
30	0.30
40	0.25
50	0.10

النوع Y	
السعر (جنيه)	الاحتمال
28	0.20
29	0.20
30	0.20
31	0.20
32	0.20

الحـــــل

X	$P(X)$	$XP(X)$	$(X-\mu)^2 P(X)$
10	0.10	1	$400 \times 0.10 = 40$
20	0.25	5	$100 \times 0.25 = 25$
30	0.30	9	$0 \times 0.30 = 0$
40	0.25	10	$100 \times 0.25 = 25$
50	0.10	5	$400 \times 0.10 = 40$
		$\mu = 30$	$\sigma^2 = 130$

Y	$P(Y)$	$XP(X)$	$(Y-\mu)^2 P(Y)$
28	0.20	5.6	$4 \times 0.20 = 0.8$
29	0.20	5.8	$1 \times 0.20 = 0.2$
30	0.20	6.0	$0 \times 0.20 = 0$
31	0.20	6.2	$1 \times 0.20 = 0.2$
32	0.20	6.4	$4 \times 0.20 = 0.8$
		$\mu = 30$	$\sigma^2 = 2.00$

واضح أن قرار الشراء سيكون فى صالح النوع Y.

نظرية

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 f(X_i) - \mu^2$$

البرهان

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 f(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2\right) f(X_i)$$

$$= \sum_{i=1} X_i^2 f(X_i) - 2\mu \sum_{i=1} X_i f(X_i) + \mu^2 \sum_{i=1} f(X_i) = \sum_{i=1} X_i^2 f(X_i) - \mu^2$$

مثال (٢)

احسب التوقع الرياضى والتباين للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء عملة معدنية مرتين حيث المتغير العشوائى X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحـــل

نكون الجول الآتى:

X_i	$f(X_i)$	$X_i f(X_i)$	$X_i^2 f(X_i)$
0	1/4	0	0
1	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	1
		$\mu = 1$	$\sigma^2 = 1.5 - (1)^2 = 0.5$ $\therefore \quad \sigma = \sqrt{0.5} = 0.7$

مثال (٣)

احسب التوقع الرياضى والتباين للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات حيث المتغير العشوائى X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحـــل

نكون الجول الآتى:

X_i	$f(X_i)$	$X_i f(X_i)$	$X_i^2 f(X_i)$
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8
		$\mu = 3/2$	$\sigma^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$ $\therefore \quad \sigma = \sqrt{0.75} = 0.87$

خصائص التباين لمتغير عشوائى متقطع

$$Var(c) = 0 \quad , \quad Var(cX) = c^2 V(X) \quad , \quad Var(aX + b) = a^2 V(X)$$

تمـــــــــرين ٤ (أ)

١. عند توقيع الكشف الطبى على الطلاب المتقدمين للكليات العسكرية يكون مطلوب قياس أطوال الطلاب (بالسنتيمتر) وقوة إبصارهم بالقيم $\frac{6}{6}$، $\frac{6}{9}$، $\frac{6}{12}$، ...، $\frac{6}{60}$ لكل عين من العينين. أى من هذه القياسات يُعَرِّف متغيرا عشوائيا متقطعا وأيها يُعَرِّف متغيرا عشوائيا متصلا؟

٢. عند إجراء إحصاء عدد أجهزة التليفزيون التى تملكها الأسر فى حى من أحياء مدينة ما، إذا كان X يمثل عدد الأجهزة، هل X متغير عشوائى متقطع أم متصل؟

٣. فى تجربة إلقاء زهرى نرد متمايزتين مرة واحدة أوجد التوزيع الاحتمالى للتوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X الذى يعرف كالآتى:

$$X = \max(m, n)$$

حيث m ، n قراءتا وجهى الزهر.

٤. إذا كان احتمال النجاح فى مادة من المواد يساوى 0.7 وأخذنا عينة من أربعة طلاب فأوجد التوزيع الاحتمالى لعدد الطلاب الناجحين فى المادة.

٥. إذا كانت العبوة من حبوب الزهور تحتوى على ثمان حبوب تنتج زهورا حمراء، عشر حبوب تنتج زهورا صفراء وزرعنا خمس حبوب فأوجد التوزيع الاحتمالى لعدد الزهور الصفراء المستنبتة.

٦. ما هو احتمال أن تحتوى مجموعة من ١٣ كارت من أوراق اللعب على:

(أ) صفر آس (ب) واحد آس (ج) إثنين آس (د) ثلاثة آس (هـ) أربعة آس؟

٧. كيس يحتوى على عشر كور منها أربع معيبة. فإذا اخترنا ثلاث كور عشوائيا فما هو احتمال أن تكون:

(أ) كلها سليمة (ب) واحدة منها معيبة (ج) إثنتان منها معيبتان (د) كلها معيبة؟

٨. مصنع ينتج آلات حاسبة على دفعات كل دفعة تحتوى على ١٠٠ آلة. فإذا كان احتمال أن تحتوى كل دفعة على أربع آلات معيبة واخترنا ثلاث آلات عشوائيا، فما هو احتمالى أن تكون:

(أ) كلها سليمة (ب) واحدة منها معيبة (ج) إثنتان منها معيبتان (د) كلها معيبة؟

٩. أثبت أن كلا من الجداول الآتية يمثل توزيعا احتماليا وأوجد توقعه وتباينه:

(أ)

X	1	3	4	7	9	10	14	18
$P(X=x)$	0.11	0.07	0.13	0.28	0.18	0.05	0.12	0.06

(ب)

X	3	5	7	8	9	10	12	16
$P(X=x)$	0.08	0.10	0.16	0.25	0.20	0.03	0.13	0.05

١٠. أوجد قيمة الثابت C لكى يكون كلا من الجداول الآتية يمثل توزيعا احتماليا وأوجد توقعه وتباينه:

(أ)

X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	C

(ب)

X	-1	2	5	8
$f(X)$	0.3	C	0.2	0.1

أوجد أيضا:

$$P(X \geq 0), P(0 \leq X \leq 5), P(X > 9), P(X \leq -2)$$

١١. ألقى حجر نرد مرتين. إذا كان X يمثل الفرق المطلق بين الوجهين فأوجد التوقع والتباين للمتغير العشوائى X.

١٢. يوجد بمخزن للأجهزة الكهربية عدد 7 آلات حاسبة منها 2 معيبتان واشترى منها مكتب محاسبة ثلاث آلات. فإذا كان المتغير X يمثل عدد الآلات المعيبة فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير X واحسب توقعه وتباينه.

١٣. وجد أن حضور الجمهور لمشاهدة مباريات كرة القدم فى استاد مدينة من المدن

الأوربية يتبع النمط الآتى:

إذاكان الجو قارص البرودة فإن عدد الحضور يكون 30,000 وإذا كان الجو باردا فإن عدد الحضور يكون 40,000 وإذا كان الجو معدلا فإن عدد الحضور يكون 60.000 أما إذا كان الجو دافئا فإن عدد الحضور يزداد إلى 80,000. فإذا كان احتمال أن يكون الجو فى الحالات الأربع يساوى 0.08 ، 0.42 ، 0.42 ، 0.08 على الترتيب فأوجد العدد المتوقع للحضور.

١٤. الجدول الآتى يعطى النسب المختلفة لإنجاب الأطفال لزوج وزوجة فى متوسط العمر فى بلدة ما:

عدد الأطفال	0	1	2	3
النسبة	10.2%	15.9%	31.8%	42.1%

فإذا اختيرت عائلة عشوائيا، أوجد عدد الأطفال المتوقع.

الدرس الخامس

توزيعات المتغير العشوائى المتقطع

DISCRETE RANDOM VARIABLE DISTRIBUTIONS

٥- ١ توزيع ذى الحدين The Binomial Distribution

تَوَلّد توزيع ذى الحدين عن نموذج ابتدعه العالم الرياضي برنولى فى القرن السابع عشر. لذا يطلق على هذا التوزيع أحيانا اسم محاولة برنولى ***Bernoulli Trial***. ونعطى التعريف الآتى لنموذج ذى الحدين:

يتكون نموذج ذى الحدين من متتابعة من n من المحاولات تحقق الشروط الآتية:

- كل المحاولات متطابقة.
- لكل محاولة ناتجان: نجاح ***success*** أو فشل ***fail***.
- احتمال النجاح p واحتمال الفشل $q = 1 - p$ يظلان ثابتان فى كل المحاولات.
- كل المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

فمثلا إلقاء عملة معدنية عدة مرات للحصول على صورة، إطلاق أعيرة نارية لمحاولة إصابة الهدف؛ تكرار الامتحان فى مقرر من المقررات بغية النجاح؛ كل هذه تندرج تحت اسم نموذج ذى الحدين.

مثال

نفرض أن لدينا قطعة نقود غير منتظمة وأن لدينا من القرائن ما يجعلنا نعتقد أن احتمال ظهور الصورة فى الرمية الواحدة يساوى 0.6 واحتمال ظهور الكتابة فى الرمية الواحدة 0.4. إذا كررنا الرمي ثلاث مرات، فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

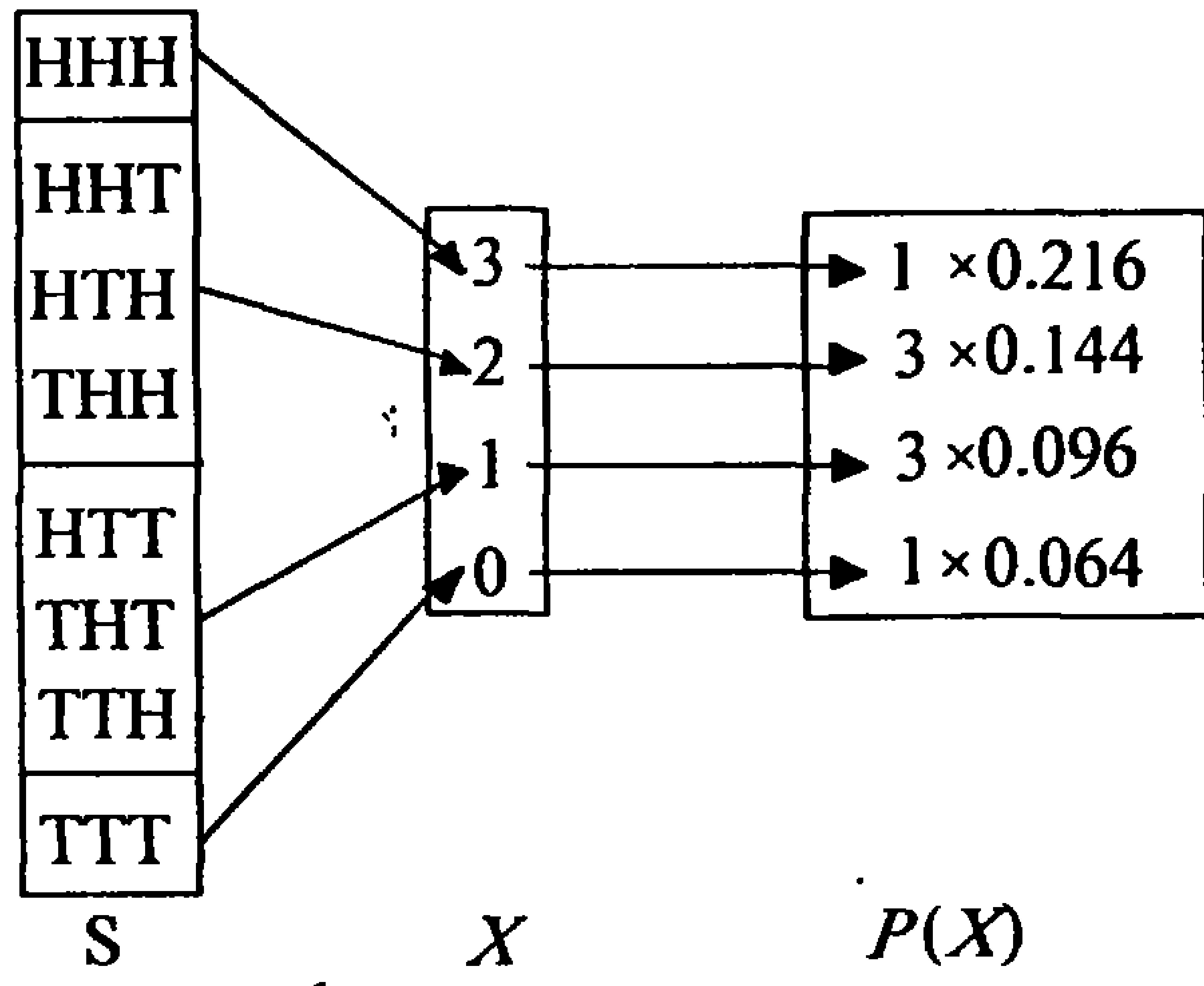
فضاء النواتج هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$
$$\doteq \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$$

احتمالات هذه النواتج غير متساوية وهى:

$$P(\{w_1\}) = (0.6)^3 = 0.216,$$
$$P(\{w_2\}) = P(\{w_3\}) = P(\{w_4\}) = (0.6)^2(0.4) = 0.144,$$
$$P(\{w_5\}) = P(\{w_6\}) = P(\{w_7\}) = (0.6)(0.4)^2 = 0.096,$$
$$P(\{w_8\}) = (0.4)^3 = 0.064.$$

وحيث أن المتغير العشوائى X هو عدد مرات ظهور الصورة فإن التوزيع الاحتمالى لهذا المتغير يكون مبينا بالشكل الآتى:



وبوجه عام إذا كررنا الرمى n من المرات فإن المتغير العشوائى يكون توزيعه الاحتمالى هو:

$$b(n,x;p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x},q=1-p$$

ويمثل $b(n,x;p)$ احتمال نجاح المتغير العشوائى x من المرات فى n من المحاولات إذا كان احتمال النجاح فى المرة الواحدة يساوى p. ويسمى **توزيع ذى الحدين بمعلمتين** n ، p .

٥-١-١ دالة التوزيع التراكمية

تُعَرَّف دالة توزيع ذى الحدين التراكمية كالآتى:

$$B(n,k;p)=P(X\le x)=\sum_{x=0}^{k} b(n;x,p)$$

هذا وتوجد جداول لـــ $B(n,x;p)$ عند القيم:

$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25$

لقيم p المختلفة. ونستطيع استنتاج $b(n,x;p)$ من $B(n,x;p)$ كالآتى:

$$b(n,k;p)=B(n,k;p)-B(n,k-1;p)$$

مثال (١)

إذا كان احتمال إصابة الهدف لجندى قناص هو 0.9 فى كل مرة ورمى هذا الجندى خمس رميات فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد مرات إصابة الهدف واحسب احتمال:

(أ) عدم إصابة الهدف.　　　(ب) إصابة الهدف مرتين.

(ج) إصابة الهدف أربع مرات.　　　(د) إصابة الهدف أكثر من مرتين.

(هـ) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل.

الحـــــل

$$P(X=k)=b(5,k,0.9)=\binom{5}{k}(0.9)^k(0.1)^{5-k}$$

(أ) احتمال عدم إصابة الهدف يساوى:

$$b(5,0,0.9)=(0.1)^5=0.00001$$

(ب) احتمال إصابة الهدف مرتين يساوى:

$$b(5,2,0.9) = B(5,2;0.9) - B(5,1,;0.9) = 0.009 - 0.000 = 0.009$$

$B(5,k;p)$

k \ p	.05	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.00	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

(ج) احتمال إصابة الهدف أربع مرات يساوى:

$$b(5,4,0.9) = B(5,4;0.9) - B(5,3,;0.9) = 0.410 - 0.081 = 0.329$$

$B(5,k;p)$

k \ p	.05	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.00	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

(د) احتمال إصابة الهدف أكثر من مرتين يساوى:

$$b(5,3;0.9)+b(5,4;0.9)+b(5,5;0.9)=1-B(5,2;0.9)$$
$$=1-0.009 = 0.981$$

(هـ) احتمال إصابة الهدف مرة على الأقل يساوى:

$$1-b(5,0;0.9)=1-(0.1)^5$$

مثال (٢)

مشغل به 6 ماكينات خياطة متطابقة ومتمايزة، إذا كان احتمال أن تحتاج أى ماكينة إلى إصلاح خلال عام يساوى 0.1 واحتمال ألا تحتاج الماكينة إلى إصلاح 0.9 فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يدل على عدد الماكينات التى تحتاج إلى إصلاح واحسب احتمال:

(أ) ألا تحتاج أى من الماكينات إلى إصلاح. (ب) أن تحتاج ماكينتان إلى إصلاح.

(ج) أن تحتاج ماكينتان على الأكثر إلى إصلاح. (د) أن تحتاج ماكينتان على الأقل إلى إصلاح.

الحـــــل

التوزيع الاحتمالى هو:

$$b(6,k,0.1)=\binom{6}{k}(0.1)^k(0.9)^{6-k}$$

(أ) احتمال ألا تحتاج أى من الماكينات إلى إصلاح هو:

$$b(6,0,0.1)=(0.9)^6$$

(ب) احتمال أن تحتاج ماكينتان إلى إصلاح هو:

$$b(6,2,0.1)=B(6,2,0.1)-B(6,1,0.1)=0.984-0.886=0.098$$

$n=6$

k \ p	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0-000	0.000	0.000
1	0.967	0.886	0.655	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000	0.000
2	0.998	0.984	0.901	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001	0.000
3	1.000	0.999	0.983	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016	0.002
4	1.000	1.000	0.998	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.345	0.114	0.033
5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0882	0738	0.469	0.265
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

(ج) احتمال أن تحتاج ماكينتان على الأكثر إلى إصلاح هو:

$$b(6,0;0.1)+b(6,1;0.1)+b(6,2;0.1)=B(6,2;0.1)=0.984$$

(د) احتمال أن تحتاج ماكينتان على الأقل إلى إصلاح هو:

$$b(6,2;0.1)+b(6,3;0.1)+b(6,4;0.1)+b(6,5;0.1)+b(6,6;0.1)=1-B(6,1;0.1)$$

$$=1-0.886$$

$$=0.114$$

٥-١-٢ توقع وتباين توزيع ذى الحدين

يمكن أن نثبت أن توقع توزيع ذى الحدين هو:

$$\boxed{\mu = np}$$

وأن تباين توزيع ذى الحدين هو:

$$\boxed{\sigma^2 = npq}$$

مثال (١)

إذا كان احتمال إصابة الهدف لجندى قناص هو 0.9 فى كل مرة ورمى هذا الجندى أربع رميات فأوجد متوسط التوزيع الاحتمالى والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد مرات إصابة الهدف.

الحـــــل

$$\mu = np = 4 \times 0.9 = 3.6$$

$$\sigma^2 = npq = 4 \times 0.9 \times 0.1 = 0.36$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{0.36} = 0.6$$

مثال (٢)

سحبت كرة من كيس يحتوى على 10 من الكرات، منها كرتين معيبتين وذلك 7 مرات مع الإحلال. احسب متوسط التوزيع الاحتمالى والانحراف المعيارى لعدد الكرات المعيبة.

الحـــــل

$$\mu = np = 7 \times 0.2 = 1.4$$

$$\sigma^2 = npq = 7 \times 0.2 \times 0.8 = 1.12$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{1.12} = 1.095$$

مثال (٣)

إذا كان X متغير عشوائى متقطع يتبع توزيع ذى الحدين متوسطه 2 وتباينه $\frac{4}{3}$ فأوجد $P(X \geq 4)$.

الحـــــل

$$np = 2 \quad , \quad npq = 4/3$$

$$\therefore \quad q = \tfrac{4}{3} \div 2 = \tfrac{2}{3} \therefore \quad p = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} \quad , \quad n = 2 \div \tfrac{1}{3} = 6$$

$$\therefore \quad P(X \geq 4) = b(6,4;\tfrac{1}{3}) + b(6,5;\tfrac{1}{3}) + b(6,6;\tfrac{1}{3})$$

$$= \binom{6}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5\left(\tfrac{2}{3}\right) + \binom{6}{6}\left(\tfrac{1}{3}\right)^6$$

$$= 15 \times \tfrac{1}{81} \times \tfrac{4}{9} + 6 \times \tfrac{1}{243} \times \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{729} = \tfrac{73}{729}$$

٢-٥ توزيع بواسون Poisson Distribution

علمنا أن توزيع توزيع ذى الحدين يتضمن تكرار تجربة عشوائية لها ناتجان (نجاح- فشل) عدد n من المرات المستقلة مع ثبات احتمال النجاح p. ومع أن توزيع توزيع ذى الحدين له تطبيقات عديدة، إلا أنه توجد فى حياتنا اليومية تطبيقات يصعب فيها تطبيق هذا التوزيع. فمثلا عندما يكون عدد مرات تكرار التجربة العشوائية n كبير وعندما يكون احتمال النجاح p صغير جدا. فمثلا:

- عدد السيارات التى تمر من بوابة الرسوم فى فترة معينة.
- عدد المكالمات التليفونية التى يتلقاها سنترال مؤسسة فى فترة معينة.
- عدد الحوادث المرورية فى الأسبوع أو الشهر.
- عدد المشترين الذين يصلون عند ماكينة الحساب فى متجر كبير فى فترة معينة.
- عدد الأخطاء الإملائية فى صفحات كتاب.

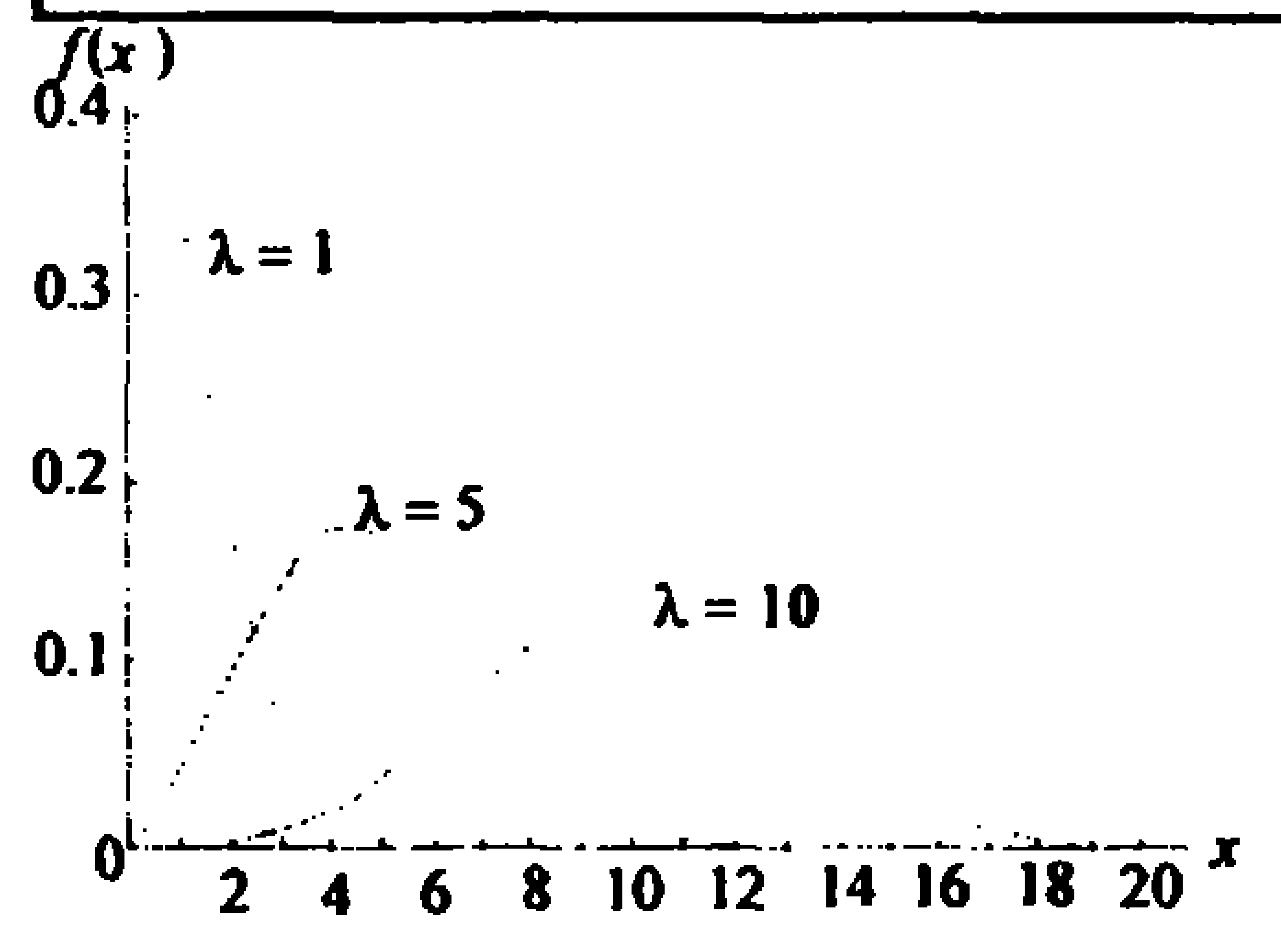
فى مثل هذه الحالات فإن تطبيق توزيع بواسون يكون أقل صعوبة من توزيع ذى الحدين. وسنعطى التعريف الآتى:

> يقال أن المتغيرالعشوائى X يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda > 0$ إذا كانت دالته الاحتمالية f على الصورة:
>
> $$f(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

هذا؛ ويمكن استنتاج توزيع بواسون كحالة نهائية من توزيع ذى الحدين.

> ليكن توزيع ذى الحدين بمعلمتين n ، p ولتكن n كبيرة كبيرا كافيا، p صغيرة صغرا كافيا بحيث يؤول np إلى مقدار محدود λ. فإن توزيع ذى الحدين يؤول إلى توزيع بواسون بمعلمة λ.

وتفسر المعلمة λ على أنها متوسط مرات النجاح فى الفترة الزمنية المحددة. ويبين الشكل الآتى منحنيات دالة توزيع بواسون لقيم مختلفة للمعلمة λ: ⇦



هذا، وتوجد جداول لحساب $f(x)$ لقيم مختلفة للمعلمة λ.

٥-٢-٢ توقع وتباين توزيع بواسون

يمكن أن نثبت أن توقع وتباين توزيع بواسون هما:

$$\boxed{\mu = \lambda} \quad , \quad \boxed{\sigma^2 = \lambda}$$

مثال (١)

وجد المختصون فى متجر للأجهزة المنزلية أن متوسط الطلب اليومى على أجهزة التليفزيون يساوى 3 من كل 100 من العملاء. فإذا بيع فى يوم من الأيام 50 جهازا منزليا فما هو احتمال أن يكون أكثر من ثلاثة من هذه الأجهزة تليفزيونات؟

الحـــل

لنأخذ المتغير العشوائى X ليكون هو عدد الطلبات من أجهزة التليفزيون. حيث أن احتمال الطلب على أجهزة التليفزيون هو 0.03 فقط، عدد الأجهزة المنزلية يساوى 50 ، إذن فالتوزيع الاحتمالى المناسب هو توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 50\times0.03 = 1.5$.

$$f(X=x) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}, \; x = 0,1,2,\cdots$$

$$P(X>3) = 1-P(X\le 3) = 1-[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]$$

$$= 1-[0.223+0.335+0.251+0.126] = 0.065$$

x	λ						
	.2	.5	.8	1	1.5	2	2.5
0	.8187	.6035	.4493	.3679	.2231	.1353	.0821
1	.1637	.3033	.3595	.3679	.3347	.2707	.2052
2	.0164	.0758	.1438	.1839	.2510	.2707	.2565
3	.0011	.0126	.0383	.0613	.1255	.1804	.2138
4	.0011	.0016	.0077	.0153	.0471	.0902	.1336
5		.0002	.0012	.0031	.0141	.0361	.0668
6			.0002	.0005	.0035	.0120	.0278
7				.0001	.0008	.0034	.0099
8					.0001	.0009	.0031
9						.0002	.0009
10							.0002

مثال (٢)

إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية فى إحدى الغابات يساوى 3 فما احتمال عدم حدوث حرائق فى تلك الغابة على مدى شهر؟ وما احتمال حدوث حريقين أو أقل فى الشهر؟

الحـــل

لنأخذ المتغير العشوائى X ليكون هو عدد الحرائق فى الشهر. بفرض أن التوزيع الاحتمالى يتبع توزيع بواسون، وحيث أن احتمال حدوث حريق فى الشهر هو 3، إذن $\lambda = 3$.

$$f(X=x)=\frac{e^{-3}(3)^x}{x!},\ \ x=0,1,2,\cdots$$

احتمال عدم حدوث حرائق فى الشهر هو:

$$f(0)=\frac{e^{-3}\cdot 3^0}{0!}=e^{-3}=0.0498$$

احتمال حدوث حريقين أو أقل فى الشهر هو:

$$f(0)+f(1)+f(2)=\frac{e^{-3}\cdot 3^0}{0!}+\frac{e^{-3}\cdot 3^1}{1!}+\frac{e^{-3}\cdot 3^2}{2!}=e^{-3}+3e^{-3}+4.5e^{-3}$$

$$=8.50\times.0498=0.423$$

x	λ							
	3	4	5	6	8	10	15	20
0	.0498	.0183	.0067	.0025	.0003			
1	.1494	.0733	.0337	.0149	.0027	.0005		
2	.2240	.1465	.0842	.0446	.0107	.0023		
3	.2240	.1954	.1404	.0892	.0286	.0076	.0002	

$$f(0)+f(1)+f(2)=0.0498+0.1494+0.2240=0.4232$$

مثال (٣)

أظهرت سجلات الأرصاد فى مدينة أوروبية أن الثلوج تتساقط بمعدل أربعة أيام فى شهر نوفمبر. استخدم نموذج بواسون فى إيجاد احتمال أن تتساقط الثلوج ثلاثة أيام على الأكثر فى نوفمبر القادم.

الحـــل

$$n=30\ ,\ p=4/30\ ,\ \lambda=np=30(4/30)=4.$$

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0.0183+0.0733+0.1465+0.1954$$

$$=0.4335$$

٣-٥ التوزيع الهندسي The Geometric Distribution

ليكن لدينا تجربة عشوائية لها نتيجتين (نجاح – فشل) وليكن احتمال النجاح يساوى p ، واحتمال الفشل يساوى $q = 1 - p$ ولنفرض أننا كررنا التجربة للحصول على أول نجاح.
ليكن X متغيرا عشوائيا يُعبّر عن عدد مرات تكرار التجربة للحصول على النجاح.
فمثلا إذا رمينا قطعة نقود معدنية عدة مرات للحصول على الصورة، وكان احتمال ظهور الصورة يساوى $1/3$ ، احتمال ظهور الكتابة يساوى $2/3$ فسنجد الآتى:

- احتمال الحصول على الصورة فى المرة الأولى يساوى $1/3$.
- الحصول على الصورة فى المرة الثانية يعنى أننا حصلنا على الكتابة فى المرة الأولى والصورة فى المرة الثانية. وحيث أن الرميتين مستقلتان، إذن فاحتمال هذا الحدث يساوى $(2/3)(1/3)$.
- الحصول على الصورة فى المرة الثالثة يعنى أننا حصلنا على الكتابة فى المرتين الأولى والثانية والصورة فى المرة الثالثة. وحيث أن الرميات الثلاثة مستقلة، إذن فاحتمال هذا الحدث يساوى $(1/3)(2/3)^2$ ...وهكذا.
- احتمال الحصول على الصورة فى المرة رقم x يساوى $(1/3)(2/3)^{x-1}$.

مثل هذا التوزيع الاحتمالى يسمى التوزيع الهندسى ***geometric distribution***.

يقال أن المتغيرالعشوائى X يتبع توزيعا هندسيا بمعلمة p إذا كانت دالته الاحتمالية:

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \ , x = 1,2,\cdots$$

أى:

$$f(x) = pq^{x-1} \ , x = 1,2,\cdots$$

ويناسب التوزيع الهندسى حالات مثل الحالات الآتية:

- احتمال إصابة هداف هدفا ما بعد عدة محاولات باءت بالفشل.
- احتمال ولادة ذكر بعد عدة ولادات كلها أنثى.
- احتمال ظهور وحدة تالفة من عينة بعد فحص عدة وحدات كلها سليمة.

١-٣-٥ خصائص التوزيع الهندسى Properties of the Geometric Distribution

١. الدالة التراكمية للتوزيع الهندسى هى:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} pq^{k-1} = p(1 + q + \cdots + q^{k-1}) = p\,\frac{1-q^x}{1-q}$$

$$F(x) = 1 - q^x$$

٢. القيمة المتوقعة للتوزيع الهندسى هى:

$$\mu = 1/p$$

٣. تباين التوزيع الهندسى هو:

$$\sigma^2 = q/p^2$$

مثال (١)

يُصَوِّب هداف عدة مرات على هدف ما باحتمال إصابة الهدف 0.9 كل مرة. إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات التصويب ليصاب الهدف فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالى للمتغير X.

(ب) احتمال إصابة الهدف فى المرة الثالثة.

(ج) توقع التوزيع وانحرافه المعيارى.

الحـــــل

المتغير العشوائى X يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $p = 0.9$.

(أ) التوزيع الاحتمالى للمتغير X هو:

$$f(x) = P(X = x) = (0.9)(0.1)^{x-1} \ , x = 1,2,\cdots$$

(ب) احتمال إصابة الهدف فى المرة الثالثة يساوى:

$$f(3) = (0.9)(0.1)^2 = 0.009$$

(ج) توقع التوزيع وانحرافه المعيارى هما:

$$\mu = 1/0.9 = 1.11 \ ,$$

$$\sigma = \sqrt{0.1/(0.9)^2} = \sqrt{1.11} = \sqrt{0.123} = 0.315$$

مثال (٢)

فى أسرة معينة وجد أن احتمال أن ترزق سيدة ذكرا يساوى 0.4. أوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالى للمتغير X الذى يمثل عدد مرات الوضع حتى ترزق ذكرا.

(ب) احتمال أن ترزق ذكرا لأول مرة بعد ولادتين كل واحدة منهما أنثى.

الحـــــل

المتغير العشوائى X يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $p = 0.4$.

(أ) التوزيع الاحتمالى للمتغير X هو:

$$f(x) = P(X = x) = (0.4)(0.6)^{x-1} \ , x = 1,2,\cdots$$

(ب) احتمال أن تلد ذكرا فى المرة الثالثة:

$$f(3) = (0.4)(0.6)^2 = 0.144$$

٤-٥ التوزيع فوق الهندسى The Hyper-Geometric Distribution

ليكن لدينا صندوق به N من المَسامير القلاووظ، وأن منها M مسمارا تالفا. فإن احتمال أن يكون أى مسمار تالفا هو $P = M/N$.

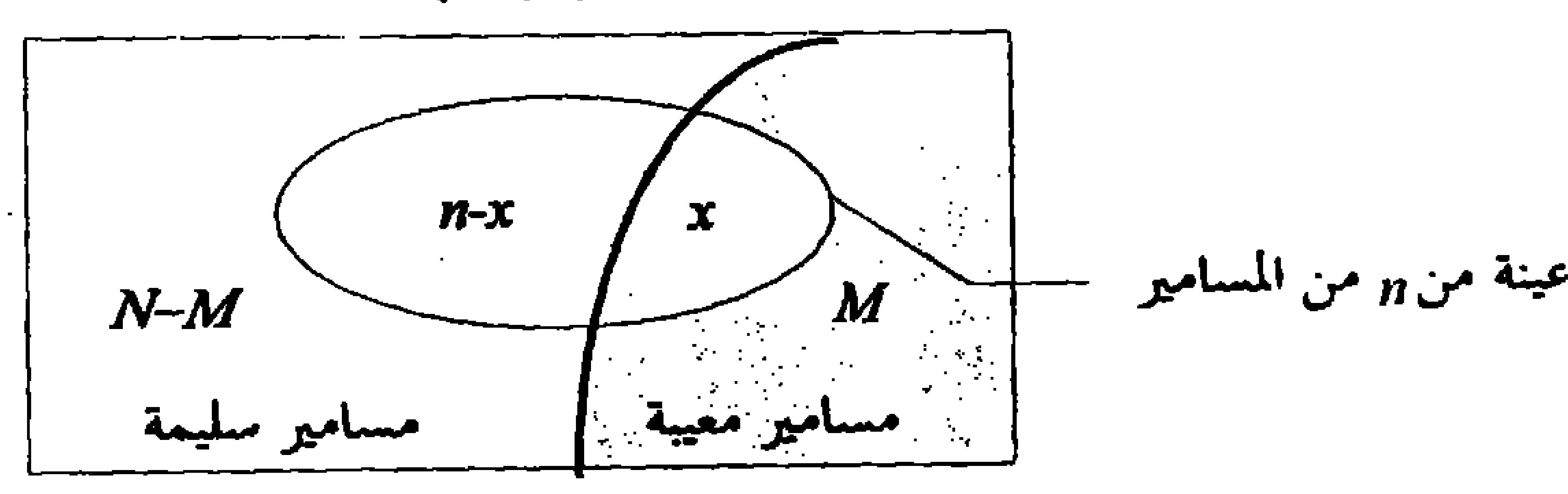
إذا أخذنا عينة من الصندوق حجمها n مع الإحلال [بمعنى أن نسحب مسمارا ونسجل حالته (سليم – تالف) ثم نرجعه إلى الصندوق ثم نسحب مسمارا ثانيا ونسجله ثم نرجعه إلى الصندوق...وهكذا] ، فإن احتمال أن نجد x من المسامير تالفا يتبع توزيع ذى الحدين ويساوى:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x}\quad,\quad x=0,1,2,\cdots$$

حيث يمثل المتغير العشوائى X عدد المسامير التالفة فى العينة.

لنفرض الآن أننا أخذنا عينة من الصندوق حجمها n ولكن بدون إحلال، فإن احتمال أن نجد x من المسامير من تلك العينة تالفا يساوى:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}\div\binom{N}{n},\quad x=0,1,2,\cdots$$



وبوضع $p=M/N$ فإن التوزيع يصبح:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}\div\binom{N}{n},\quad x=0,1,2,\cdots$$

يسمى هذا التوزيع بـ التوزيع فوق الهندسى ويُعَرَّف كالآتى:

لنفرض أننا أمكننا تقسيم مجتمع محدود مكون من N من المفردات إلى قسمين متنافيين حجميهما M ، $N-M$ بحيث تمتلك المفردات التى تنتمى إلى القسم الذى حجمه M خاصية معينة لا تمتلكها المفردات التي تنتمى إلى القسم الذى حجمه $N-M$ ، ولنفرض أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من المفردات بدون إحلال من ذلك المجتمع. فإن احتمال أن تحتوى تلك العينة على x مفردة من القسم الذى حجمه M وبالتالى $n-x$ مفردة من القسم الذى حجمه $N-M$ يتبع التوزيع فوق الهندسى بثلاث معالم N ، p ، n:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}\div\binom{N}{n},\quad x=0,1,2,\cdots$$

مثال (١)

يراد سحب عينات عشوائية كل منها تحتوى على قطعتى غيار السيارات من صندوق يحتوى 10 قطع منها 3 تالفة. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد القطع التالفة فى الحالتين الآتيتين:

(أ) إذا كان السحب مع الإحلال. (ب) إذا كان السحب بدون إحلال.

الحـــــل

(أ) إذا كان السحب مع الإحلال فإن المتغير العشوائى يتبع توزيع ذى الحدين بمعلمتين $n = 2$ ، $p = 0.3$. إذن التوزيع الاحتمالى هو:

$$f(x) = b(2,0.3;x) = \binom{2}{x}(0.3)^x(0.7)^{2-x}, x = 0,1,2$$

وفى هذه الحالة فإن:

$$f(0) = \binom{2}{0}(0.3)^0(0.7)^2 = 0.49$$

$$f(1) = \binom{2}{1}(0.3)^1(0.7)^1 = 0.42$$

$$f(2) = \binom{2}{2}(0.3)^2(0.7)^0 = 0.09$$

(ب) إذا كان السحب بدون إحلال فإن المتغير العشوائى يتبع التوزيع فوق الهندسى بثلاث معالم $N = 10$ ، $n = 2$، $p = 0.3$. إذن التوزيع الاحتمالى هو:

$$f(x) = \binom{3}{x}\binom{7}{2-x} \div \binom{10}{2}, \ x = 0,1,2$$

وفى هذه الحالة فإن:

$$f(0) = \binom{3}{0}\binom{7}{2} \div \binom{10}{2} = \frac{21}{45} \approx 0.47, \qquad f(1) = \binom{3}{1}\binom{7}{1} \div \binom{10}{2} = \frac{21}{45} \approx 0.47$$

$$f(2) = \binom{3}{2}\binom{7}{0} \div \binom{10}{2} = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

مثال (٢)

كرتونة تحتوى 20 مصباح كهربى منها اثنان تالفان. سحب ثلاثة مصابيح عشوائيا بدون إحلال. أوجد احتمال أن يكون x منها تالف.

الحـــــل

التوزيع الاحتمالى هنا فوق هندسى بثلاث معالم $N = 20$، $n = 3$ ، $p = 0.1$:

$$f(x) = \binom{2}{x}\binom{18}{3-x} \div \binom{20}{3}, \ x = 0,1,2,\ldots$$

التوزيع الاحتمالى هنا فوق هندسى بثلاث معالم $N = 20$، $n = 3$ ، $p = 0.1$:

$$f(0) = \binom{2}{0}\binom{18}{3} \div \binom{20}{3} = \frac{18\times17\times16}{3\times2\times1} \div \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = \frac{17\times16}{20\times19} \approx 0.72,$$

$$f(1) = \binom{2}{1}\binom{18}{2} \div \binom{20}{3} = \frac{2\times18\times17}{2\times1} \div \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = \frac{612}{2} \cdot \frac{6}{6840} \approx 0.27,$$

$$f(2) = \binom{2}{2}\binom{18}{1} \div \binom{20}{3} = 18 \div \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 18 \cdot \frac{6}{6840} \approx 0.016$$

٥-٤-١ توقع وتباين التوزيع فوق الهندسى

Expectation and Variance of the Hyper-Geometric Distribution

توقع التوزيع فوق الهندسى هو:

$$\mu = np$$

وتباين التوزيع فوق الهندسى هو:

$$\sigma^2 = npq\frac{N-n}{N-1}$$

تمـــــــرين ٥(أ)

١. لدى مستودع للأجهزة الإلكترونية 7 آلات حاسبة منها آلتان عاطلتان . تسلمت إحدى الجهات 3 آلات عشوائياً من هذا المستودع . أوجد التوزيع الإحتمالى للمتغير X الذى يمثل عدد الآلات العاطلة التى تسلمتها هذه الجهة ثم أوجد التوقع لـــ X وكذلك الإنحراف المعيارى.

٢. احسب التوقع الرياضى و التباين لمتغير ذى الحدين إذا كان:

(أ) $n = 3 \quad , \quad p = 1/3$ (ب) $\mu = 5 \quad , \quad \sigma^2 = 15/4$

٣. أوجد $E(X^2)$ إذا كان $\sigma^2 = 3 \quad , \quad \mu = 5$

٤. احسب كلا من احتمالات ذى الحدين الآتية:

(أ) $b(7,4;0.2)$ (ب) $b(8,5;0.3)$

(ج) $b(15,8;0.8)$ (د) $b(8,5;0.7)$

(هـــ) $b(15,10;½)$ (و) $b(12,6;0.9)$

(ز) $b(15,3;0.3) + b(15,2;0.3) + b(15,1;0.3) + b(15,0;0.3)$

(ح) $b(8,6;0.4) + b(8,7;0.4) + b(8,8;0.4)$

٥. أوجد احتمال النجاح فى 8 مرات بالضبط من 15 محاولة إذا كان احتمال النجا
يساوى 0.75.

٦. أوجد احتمال النجاح فى 5 مرات على الأقل من 8 محاولات إذا كان احتمال النجا
يساوى 0.3.

٧. أوجد احتمال النجاح فى 3 مرات على الأكثر من 7 محاولات إذا كان احتمال الفش
يساوى 0.2.

٨. إذا ألقى زوج من الزهر 7 مرات، أوجد احتمال الحصول على مجموع 11 ثلاث
مرات بالضبط.

٩. عائلة لها 6 أطفال. ما هو احتمال أن يكون لها 3 من البنين ، 3 من البنات؟

١٠. عائلة لها 7 أطفال. ما هو احتمال أن يكون لهذه العائلة:

(أ) 4 من البنات (ب) ابنتان على الأقل.

(ج) ابنتان على الأقل ، 4 من البنات على الأكثر؟

١١. إذا كان احتمال إصابة قناص لهدف 0.3 ، وإذا صوب هذا القناص نحو الهدف خمس
مرات متتالية وعَرَّفنا المتغير العشوائى X بأنه عدد مرات الإصابة فأوجد:

(أ) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X. (ب) توقع وتباين X.

(ج) إحتمال أن يصيب القناص الهدف مرة واحدة على الأكثر.

١٢. أطلق قناص 10 رصاصات على هدف ما. فإذا كان احتمال إصابة الهدف فى كل مرة
يساوى 2/3 ، فما احتمال أن يصيب الهداف الهدف مرتين على الأقل؟

١٣. لوحظ فى إحدى الألعاب الرياضية التى نتيجتها إما فوز أو خسارة أن إحتمال فوز
لاعب ما ثابت فى أى مباراة ويساوى 0.6 فإن علم أن هذا اللاعب سوف يلعب 5
مباريات مع أشخاص مختلفين خلال الموسم القادم وكان المتغير العشوائى X يمثل عدد

مرات الفوز أوجد :

(أ) الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى X.

(ب) احتمال أن يفوز بأربع مباريات على الأكثر.

(ج) احتمال أن يخسر مباريتين على الأكثر.

١٤. رميت قطعة نقود سوية ثلاث مرات .أوجد التوزيع الإحتمالى لظهور H.

١٥. إمتحان مكون من 15 سؤال من النوع (صواب ــ خطأ). ما هو احتمال أن يحصل طالب يجيب عشوائيا أن يحصل على 10 إجابات صحيحة عل الأقل؟ إذا قدر طالب آخر لنفسه احتمالا قدره 0.8 للإجابة الصحيحة على أى سؤال، فما هو احتمال أن يجيب 12 إجابة صحيحة؟

تمـــــــرين ٥(ب)

١. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بواسون وكان $P(X=0) = 0.3$ فاحسب $P(X > 3)$.

٢. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 3$ فأوجد $f(5)$.

٣. إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على الطريق الصحراوى يساوى 4 فما احتمال أن يقع فى أحد الأسابيع:

(أ) ثلاثة حوادث (ب) حادثين على الأكثر

٤. تبين سجلات الأرصاد لإحدى المدن أن متوسط نزول الثلج فى شهر نوفمبر هو ثلاثة أيام. استخدم توزيع بواسون لإيجاد احتمال أن ينزل الثلج أربعة أيام على الأكثر فى نوفمبر العام القادم.

٥. فى خلال وقت محدد يتوافد المسافرون على شباك التذاكر فى إحدى محطات القطار بمعدل قدره مسافر واحد كل دقيقتين. ما هو احتمال ألا يتوافد أحد خلال دقيقة

واحدة؟ وما هو احتمال أن يتوافد مسافران على الأقل خلال دقيقة واحدة؟

٦. ماكينة تنتج قطع غيار حسب مواصفات معينة. فإذا كان احتمال عدم مطابقة أى قطعة للمواصفات يساوى 0.05، فما هو احتمال أن يكون من بين عينة من 50 قطعة قطعتان أو أكثر غير مطابقة للماصفات؟

[قارن بين استخدام توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون]

٧. وجد أن متوسط عدد الإعصارات المدمر التى تصيب منطقة معينة فى الولايات المتحدة الأمريكية يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 7$. أوجد:

(أ) احتمال أن يصيب المنطقة أقل من خمسة إعصارات.

(ب) احتمال أن يصيب المنطقة ليس أكثر من سبعة إعصارات.

٨. مزرعة دواجن بها 10,000 دجاجة. فإذا كان احتمال أن تموت أى منها يساوى 0.0005 فما احتمال أن تموت أكثر من 10 دجاجات؟

٩. إذا كان 3% من المصابيح الكهربية المنتجة فى مصنع ما تالفة فاوجد احتمال أن يظهر فى عينة من 100 مصباح:

(أ) ثلاثة تالفين (ب) أقل من خمسة تالفين

تمـــــــرين ٥(ج)

١. إذا كان احتمال أن يصيب صائد هدفا ما يساوى 0.6 أوجد احتمال أن يصيب الهدف بعد أربعة مرات كلها فاشلة.

٢. إذا كان احتمال أن يفوز لاعب فى كرة الطاولة أمام لاعب معين يساوى 0.7، فما هو احتمال أن يفوز بعد ثلاث مباريات كلها انتهت بعدم الفوز؟ ما احتمال أن يفوز قبل المرة الثالثة؟

٣. إذا كان احتمال أن ولادة أرنب ذكر فى أى ولادة لأنثى أرنب يساوى 0.4

فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالى لعدد مرات الولادة قبل أن تلد الأرنبة ذكرا.

(ب) متوسط عدد مرات الولادة قبل أن ترزق بأول ذكر.

(ج) احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ولادتين على الأكثر.

٤. رض أن صندوقا يحتوى 100 شريط كاسيت به 5 أشرطة تالفة. إذا أخذنا عينة من 10 أشرطة، فما هو احتمال أن نجد بها x أشرطة تالفة.

تمـــــــــرين ٥(د)

١. لنفرض أن صندوقا يحتوى 100 شريط كاسيت به 5 أشرطة تالفة. إذا أخذنا عينة من 10 أشرطة، فما هو احتمال أن نجد بها x أشرطة تالفة.

٢. لنفرض أننا اخترنا خمس ورقات كوتشينة عادية بدون إحلال. أوجد احتمال أن يكون منها اثنين حمر (قلوب ، كاروه).

٣. كرتونة تحتوى على 24 مصباح كهربائى منها 3 تالفة. إذا سحبت عينة عشوائيا من 6 مصابيح من الصندوق فما احتمال أن نجد منها x تالفة.

٤. صندوق يحتوى 5 كرات حمراء ، 10 كرات زرقاء. إذا أخذنا 7 كرات عشوائيا من الصندوق وكان المتغير العشوائى X يمثل نسبة عدد الكرات الحمر فى العينة فأوجد المتوسط والتباين للمتغير X.

٥. إذا كانت شحنة من الأجهزة الإلكترونية تحتوى 3 أجهزة معيبة ، 12 سليمة واختيرت عينة عشوائية من 5 أجهزة فما هو احتمال أن يوجد بها على الأكثر جهازان معيبان؟

٦. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا فوق هندسى بمعلمات 8 ، 20 ، n فأوجد قيمة n التى تجعل $Var(X)$ أكبر ما يمكن.

٧. دفعة من 100 رقيقة كمبيوتر تحتوى 10 رقائق معيبة. إذا اخترنا 5 رقائق عشوائيا أوجد:

(أ) دالة الكثافة الاحتمالية لعدد الرقائق المعيبة فى العينة.

(ب) المتوسط والتباين للمتغير العشوائى X الذى يمثل عدد الرقائق المعيبة.

(ج) احتمال أن تحتوى العينة رقيقة واحدة معيبة على الأقل.

٨. جمعية من خمسين عضوا منها 20 رجلا ، 30 سيدة. اختيرت عشوائيا لجنة من 10 أعضاء. إذا كان X هو المتغير العشوائى الذى يمثل عدد السيدات فى اللجنة فأوجد:

(أ) متوسط وتباين X.

(ب) متوسط وتباينعدد الرجال فى اللجنة.

(ج) احتمال أن تكون اللجنة جميعها من جنس واحد.

٩. بركة صغيرة بها 1000 سمكة منها 100 مُعَلَّمة. اصطيدت 20 سمكة من البركة:

(أ) احسب احتمال أن تكون سمكتان على الأقل من العينة مُعَلَّمة.

(ب) أوجد تقريب ذى الحدين للاحتمال فى (أ).

(ج) أوجد الخطأ النسبى للتفريب (ب).

١٠. فى استطلاع للرأى وجد أن 40% من الناخبين المسجلين فى دائرة انتخابية يفضلون المرشح أ . إذا اختير 10 ناخبين عشوائيا فأوجد احتمال أن نجد منهم 5 على الأقل يفضلون المرشح أ.

١١. اثبت أن المتوسط والتباين للتوزيع فوق الهندسى يؤول إلى التوزيع ذى الدين عندما $N \to \infty$.

الدرس السادس

المتغير العشوانى المتصل

Continuous Random Variable

١- مقدمة

علمنا أن المتغير العشوانى يكون متصلا *continuous* إذا كان مداه فترة حقيقية (مغلقة أو مفتوحة) أى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية، وكل فترة جزئية من المدى يرافقها احتمال لوجود المتغير العشوانى داخلها. والآن سنعطى بعض التعريفات والاستنتاجات:

٢- دالة الكثافة الاحتمالية **Probability Density Function**

الدالة f التى تعبر عن العلاقة بين متغير عشوانى متصل X واحتماله تسمى دالة الكثافة الاحتمالية ***Probability Density Function***. هذه الدالة تبين لنا كيف يتوزع الاحتمال الكلى على الأجزاء المختلفة لمدى المتغير العشوانى X.

مثال

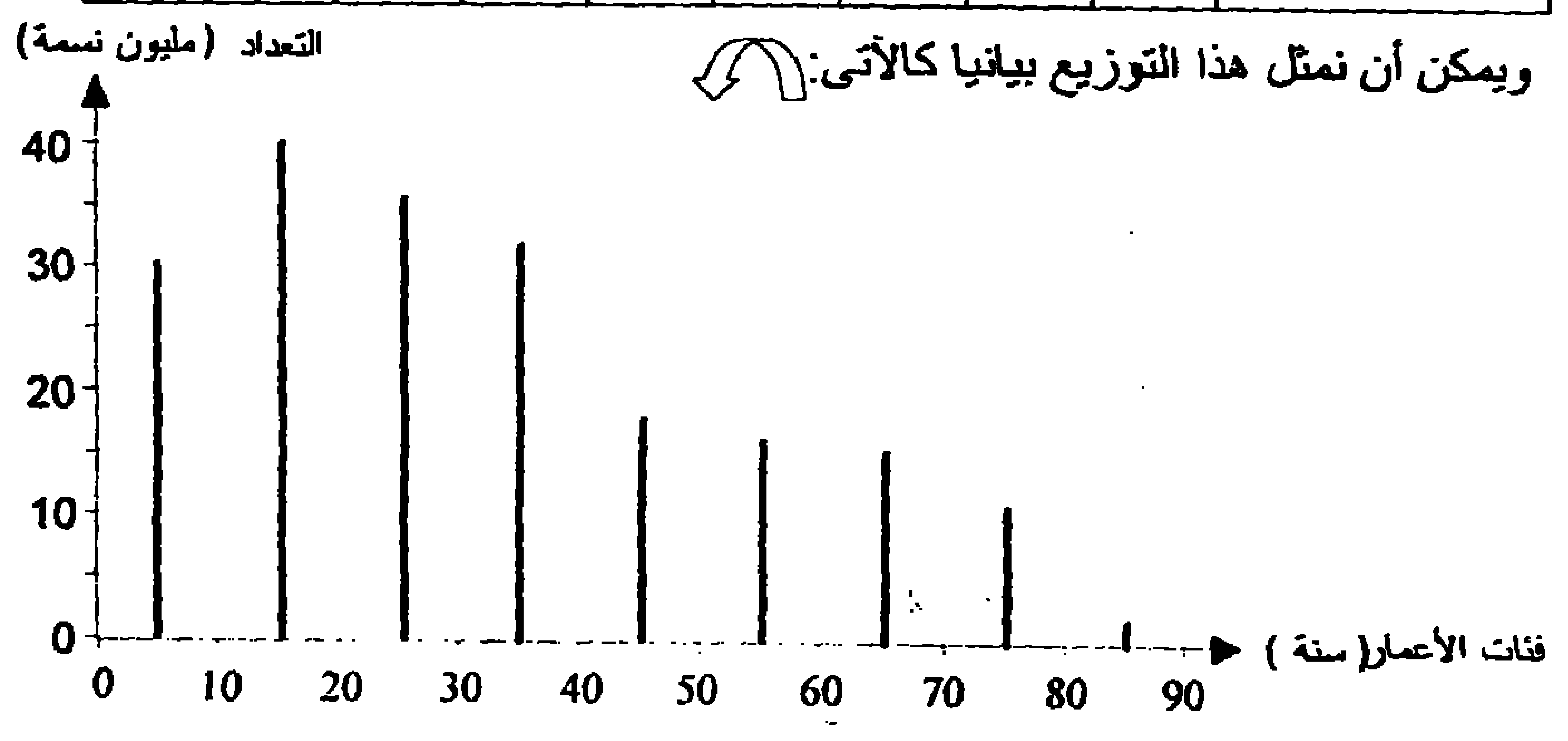
لنفرض أن توزيع الأعمار فى دولة من الدول يتبع التوزيع الآتى:

80 –	70 –	60 –	50 –	40 –	30 –	20 –	10 –	0 –	فترات الأعمار
3	12	13	15	17	33	37	40	30	التعداد (10^6)

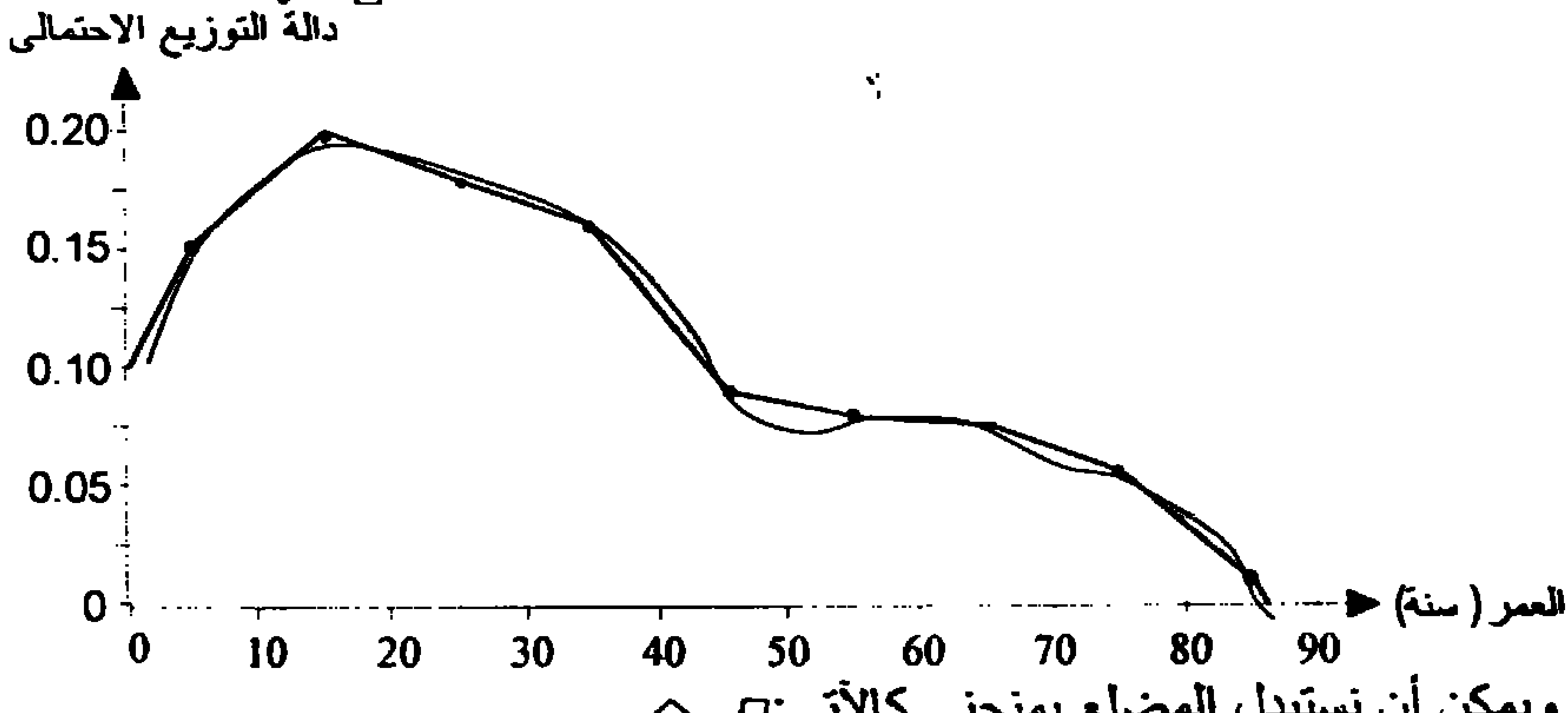
إذا أخذنا مراكز الفترات فإننا نحصل على الجدول الآتى :

85	75	65	55	45	35	25	15	5	فترات الأعمار
3	12	13	15	17	33	37	40	30	التعداد (10^6)

ويمكن أن نمثل هذا التوزيع بيانيا كالآتى:

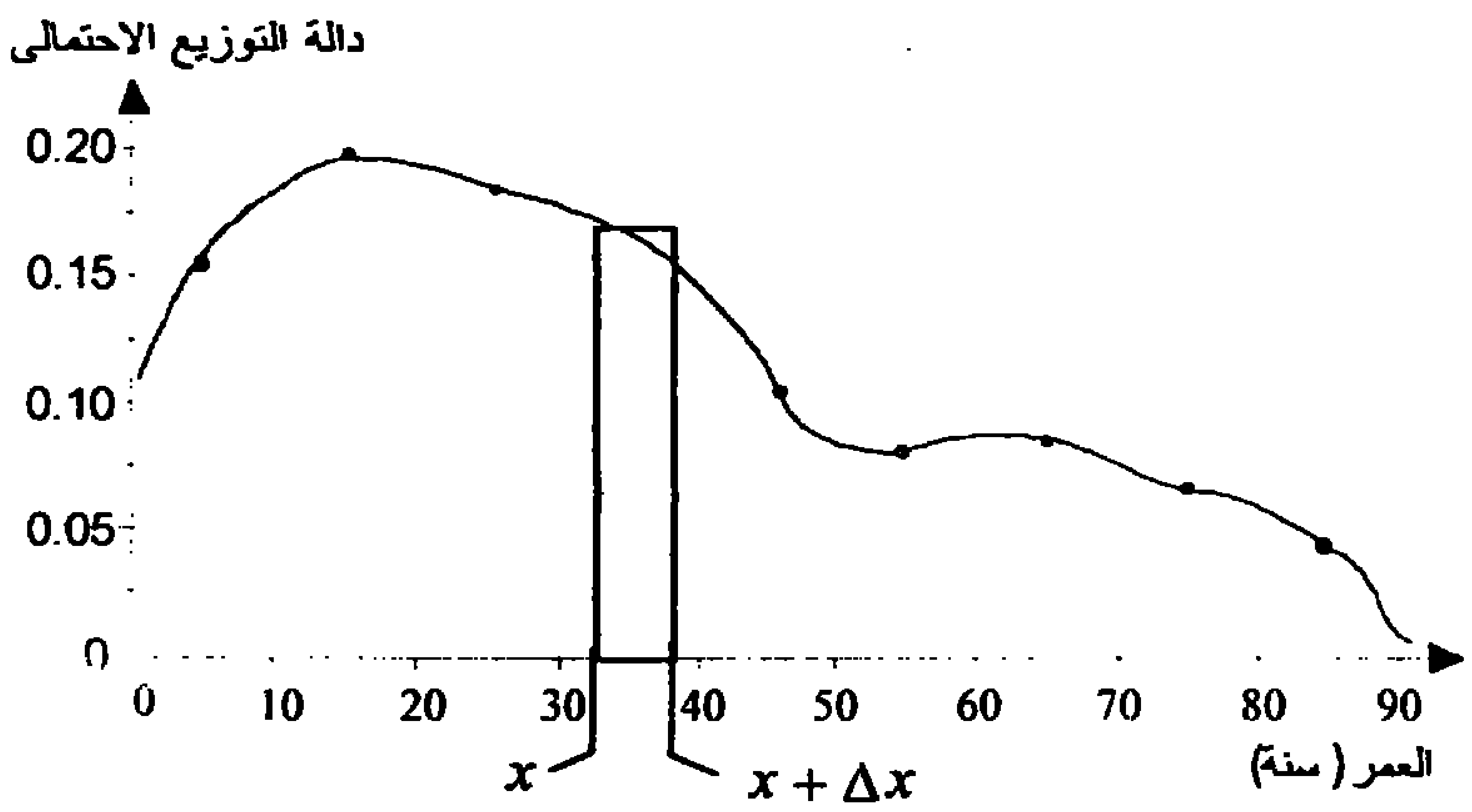


من الشكل، حيث أن هناك 40 مليون نسمة فى فترة الأعمار – 10 ، وحيث أن التعداد الكلى يساوى 200 مليون نسمة، فإن احتمال أن يكون أى شخص فى تلك الفترة من العمر يساوى 200 ÷ 40 أى 0.20. ويمكن أن نمثل التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن فترة العمر كالآتى:



ويمكن أن نستبدل المضلع بمنحنى كالآتى:

إذا فرضنا أن المنحنى يمثل دالة $f(x)$ فإن احتمال أن يكون شخص ما فى فترة العمر x إلى أقل من $x + \Delta x$ يساوى $f(x)\,\Delta x$ تقريبا ويمثل مساحة المستطيل الذى عرضه Δx وطوله $f(x)$.



نستطيع أن نحصل على احتمالات بقية الفترات بحساب مساحات المستطيلات المناظرة وبذلك يكون الاحتمال الكلى يساوى تقريبا مجموع مساحات المستطيلات. أى تساوى:

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

هذا، ويعين قياس Δx مدى دقة قيمة الاحتمال؛ فكلما صغرت Δx اقترب احتمال وجود شخص فى فترة العمر $[a , b]$ من المساحة تحت المنحنى وفوق تلك الفترة. أى:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

نستطيع الآن أن نعطى التعريف الآتى:

احتمال أن يكون ناتج تجربة عشوائية ممثلا بمتغير عشوائى X بين a ، b هو:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ يمثل قيمة دالة الكثافة الاحتمالية.

ونستطيع الآن أن نقرر الآتى:

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X يتبع توزيعا احتماليا متصلا دالة كثافته الاحتمالية f إذا كانت f تحقق الشرطين الآتيين:

١. $f(x) \ge 0$ لجميع قيم x التى يأخذها المتغير العشوائى X.

٢. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

ويجب أن نذكر أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى قيمة مفردة يساوى صفرا حيث أن تلك القيمة المفردة موجودة على فترة طولها صفر. كذلك فإن الصيغة التى أعطيناها لاحتمال وقوع X بين a ، b لاتتوقف على كون a ، b ينتميان أو لا ينتميان للفترة.

مثال

أثبت أن الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1+x)}{27}, & 2 \le x \le 5 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

تمثل دالة كثافة احتمالية على R وأوجد كلا من $P(4 \le X \le 5)$ ، $P(X \le 4)$.

الحل

من التعريف نجد أن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ مُعَرَّفة على ثلاث فترات حقيقية: $(-\infty,2]$ ، $[2,5]$ ، $[5,\infty)$ كالآتى:

على الفترة $(-\infty,2]$ تكون $f(x) = 0$، على الفترة $[2,5]$ تكون $f(x) = 2(x+1)/27$ ، على الفترة $[5,\infty)$ تكون $f(x) = 0$. ⇦

$f(x)$

4/9

2/9

x

(2,0) (5,0)

الدالة غير سالبة والمساحة تحت المنحنى هى: $\frac{3}{2}[\frac{2}{9}+\frac{4}{9}] = 1$. إذن الدالة هى دالة كثافة احتمالية.

$$P(x<4) = \int_2^4 \frac{2}{27}\cdot(1+x)\,dx = \frac{2}{27}\cdot\frac{25-9}{2} = \frac{16}{27}\ ,\qquad P(3 \le x \le 4) = 1/3$$

٣- دالة التوزيع التراكمية Cumulative Density Function

ليكن X متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافته الاحتمالية هى f . تعرف دالة التوزيع التراكمية F لهذا المتغير العشوائى كالآتى:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

٣- ١ خواص دالة التوزيع التراكمية

- F غير تناقصية.
- $F(-\infty) = 0$ ، $F(\infty) = 1$
- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

مثال (١)

أوجد دالة التوزيع التراكمية لدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}(x+1) & 2 \le x \le 5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الحــل

دالة التوزيع التراكمية F سيكون لها تعريف على الثلاث فترات كالآتى:

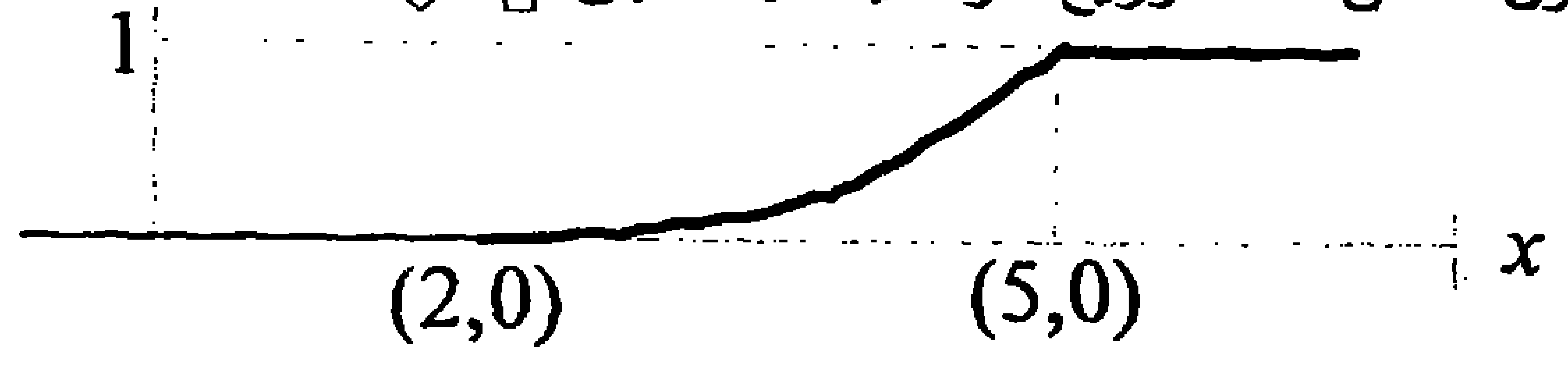
على الفترة $(-\infty, 2)$ تكون $F(x) = 0$،

وعلى الفترة $[2,5]$ تكون $f(x) = \int_{2}^{x} \frac{2}{27}(t+1)dt = \frac{1}{27}[(1+t)^2]_2^x$ أى تكون

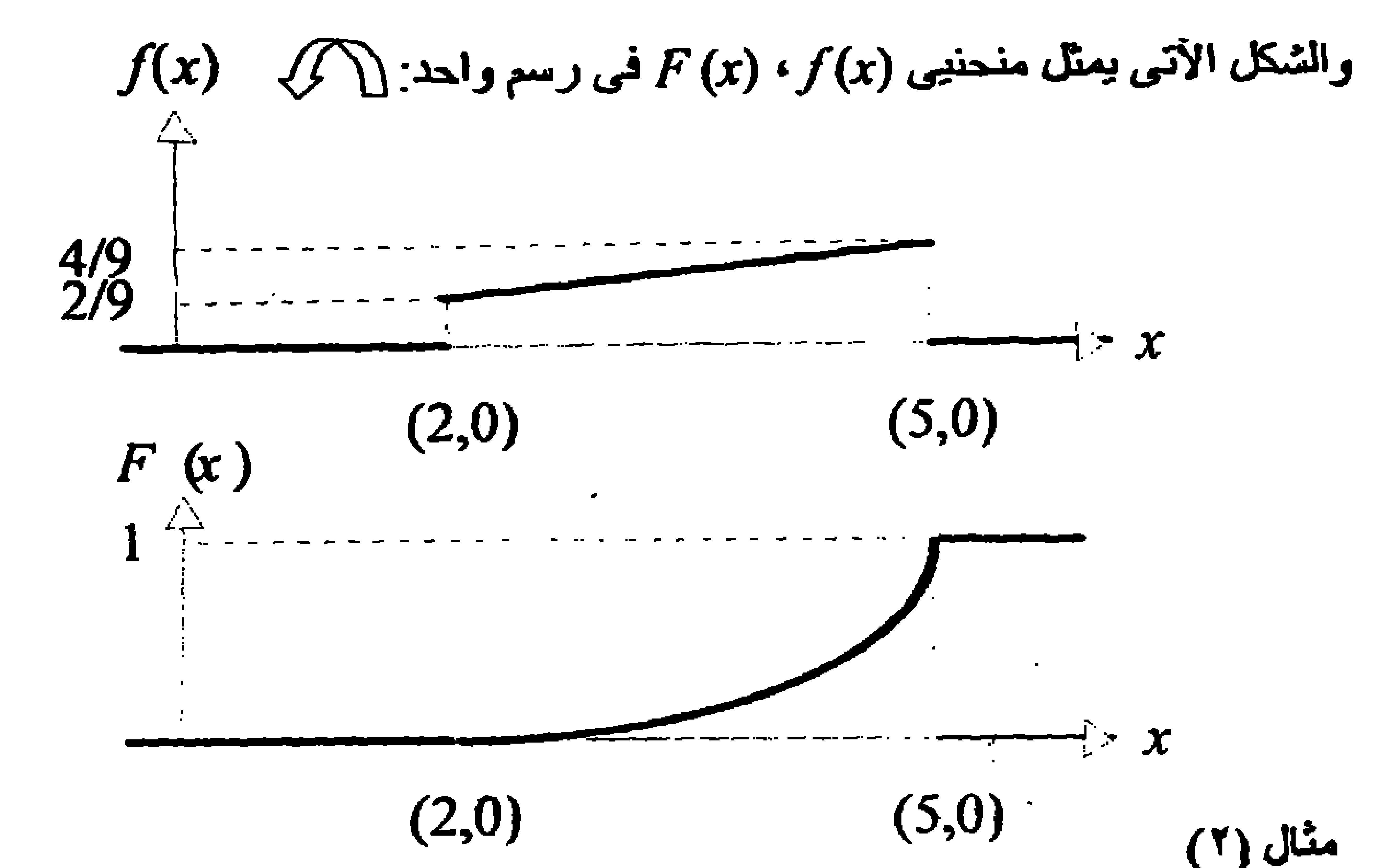
$F\ (x) = \frac{1}{27}(1+x)^2 - \frac{9}{27}$،

وعلى الفترة $(5, \infty)$ تكون $F(x) = 1$.

وبذلك يكون منحنى دالة التوزيع التراكمية F كما يلى:



والشكل الآتى يمثل منحنيى $f(x)$ ، $F(x)$ فى رسم واحد:



مثال (٢)

إذا كانت دالة التوزيع التراكمية لأعمار الأقراص الصلبة التى ينتجها أحد المصانع (بالسنوات) هى:

$$F(x) = 1 - e^{-3x} \ , \ \ x \geq 0$$

فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عمر القرص.

وإذا اشترى شخص قرصا صلبا من إنتاج هذا المصنع، فما هو احتمال أن يعيش القرص:

(أ) أقل من سنتين؟
(ب) بين سنتين وأربع سنوات؟
(ج) أكثر من أربع سنوات؟

الحـــل

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = 3e^{-3x} \ , \ \ x \geq 0$$

(أ) احتمال أن يعيش القرص أقل من سنتين هو:

$$F(2) = 1 - e^{-6}$$

(ب) احتمال أن يعيش القرص بين سنتين وأربع سنوات هو:

$$P(2 \leq x \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - e^{-12} - (1 - e^{-6}) = e^{-6} - e^{-12}$$

(ب) احتمال أن يعيش القرص أكثر من أربع سنوات هو:

$$P(x \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-12}) = e^{-12}$$

٤- القيمة المتوقعة لتوزيع احتمالى متصل

Expectation Value of a Continuous Probability Distribution

تُعَرَّف القيمة المتوقعة (التوقع) $E(X)$ لتوزيع احتمالى متصل ذى دالة كثافة احتمالية f كالآتى:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

ويفسر التوقع على أنه متوسط القيم التى يأخذها المتغير العشوائى X إذا كررنا التجربة التى يعبر عنها هذا المتغير عددا لانهائيا من المرات ويرمز له بالرمز μ.

أى أن:

$$\mu=E(X)=\int_{\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

مثال

أوجد المتوسط للمتغير العشوائى المتصل X إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x)=\tfrac{3}{250}(10x-x^2)\,,\; x\in[0,5]$$

الحل

$$\mu=\tfrac{3}{250}\int_{0}^{5} x\,(10x-x^2)=\tfrac{3}{250}\left[\tfrac{10x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}\right]_0^5=\tfrac{3}{250}\left[\tfrac{250}{3}-\tfrac{625}{4}\right]=1-\tfrac{5}{8}=\tfrac{3}{8}$$

٥- التباين والانحراف المعيارى لتوزيع احتمالى متصل

Variance and Standard Deviation of a Continuous Probability Distribution

يُعَرَّف التباين $V(X)=\sigma^2$ لتوزيع احتمالى متصل ذى دالة كثافة احتمالية f كالآتى:

$$\sigma^2=V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

أما الانحراف المعيارى فهو:

$$\sigma=\sqrt{V(X)}$$

نظرية

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$$

البرهان

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2\mu x+\mu^2)f(x)\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\, dx-2\mu\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\, dx+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\, dx$$

$$=E(X^2)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2$$

مثال

أوجد الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى المتصل X الذى دالة كثافته الاحتمالية هى:

$$f(x)=\tfrac{3}{250}(10x-x^2)\ ,\ x\in[0,5]$$

الحل

فى مثال سابق وجدنا أن التوقع لهذا المتغير هو:

$$\mu=E(x)=\tfrac{3}{8}$$

إذن:

$$\sigma^2=\tfrac{3}{250}\int_0^5 x^2(10x-x^2)\,dx-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2=\tfrac{3}{250}\left[\tfrac{10x^4}{4}-\tfrac{x^5}{5}\right]_0^5-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2$$

$$=\tfrac{3}{250}\left[\tfrac{6250}{4}-\tfrac{3125}{5}\right]-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2=\tfrac{3}{250}\times\frac{52310-12500}{20}-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2$$

$$=\tfrac{3}{250}\times199.5-0.140625=2.388-0.141=2.247$$

$$\therefore\ \sigma=\sqrt{2.247}=1.5$$

تمـــــرين ٦

١. إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية هى:

$$f(X)=\begin{cases} aX & ,\ 0\le X<1\\ a & ,\ 1\le X\le 2\\ -aX+3a & ,\ 2\le X\le 3\\ 0 & ,\ \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

فأوجد قيمة a ، دالة التوزيع التراكمية.

٢. إذا كان قطر سلك كهربائى x تنتجه إحدى الشركات يتبع توزيعا احتماليا متصلا دالة كثافته الاحتمالية هى $f(x)=\frac{10}{3}x^3(2-x)$ فتحقق من أن هذه الدالة هى دالة كثافة احتمالية وأوجد دالة التوزيع التراكمية. أوجد أيضا $P(\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3})$.

٣. سلعة كهربائية عمرها X يتبع توزيع احتمالى دالة كثافته الاحتمالية $f(x)=\dfrac{k}{x^n}$.

(أ) أوجد قيمة k إذا كان $n=2$ (ب) أوجد قيمة k إذا كان $n=3$

(ج) ما إحتمال أن ينتهى عمر السلعة قبل 5000 ساعة.

٤. إذا كان x متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)=c.x^3(1-x)\ ;\ 0\le x\le 1$

فأوجد قيمة c ، $P(x>1/2)$.

٥. أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{1}{8}x\ ,\ 0\le x\le 4$ هى دالة كثافة إحتمالية.

وإذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافته $f(x)$ أوجد $P(X\le 1)$ ، $P(1\le X\le 3)$

٦. أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{2}{9}x\ ,\ 0\le x\le 3$ ، صفر فيما عدا ذلك هى دالة كثافة إحتمالية.

واحسب قيمة احتمال أن يقع المتغير العشوائى داخل الفترة [2,2.5].

٧. أوجد القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائى المتصل X الذى دالة كثافته الاحتمالية هى:

$$f(x)=\begin{cases} x & ,\ 0\le x\le 1 \\ 2-x & ,\ 1\le x\le 2 \\ 0 & ,\ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ثم استنتج احتمال وجود X داخل الفترة $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$.

٨. يتم إمداد محطة بتزين بالبترول صباح السبت من كل أسبوع. فإذا كانت كمية البترول مقدرة بآلاف اللترات هى متغير عشوائى متصل دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x)=\begin{cases} kx(C-2x) & ,\ 0.5\le x\le 1.5 \\ 0 & ,\ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد k ، c إذا علمت أن متوسط الإمداد الأسبوعى يساوى 90,000 لتر.

٩. أوجد القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائى المتصل X الذى دالة كثافته الاحتمالية هى:

$$f(x)=\begin{cases} ce^{-2x} & ,\ 0\le x\le \infty \\ 0 & ,\ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١٠. إذا كانت أعمار المصابيح التى تنتجها إحدى المصانع تتبع توزيعا احتماليا متصلا دالة كثافته الاحتمالية هى $f(x)=\frac{8}{3}x^2e^{-2x}\ ,\ x\ge 0$ حيث x هى عمر المصباح بالشهور، فأوجد متوسط عمر المصباح وانحرافه المعيارى.

الدرس السابع

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائى المتصل

Some Probability Distributions of a Continuous Random Variable

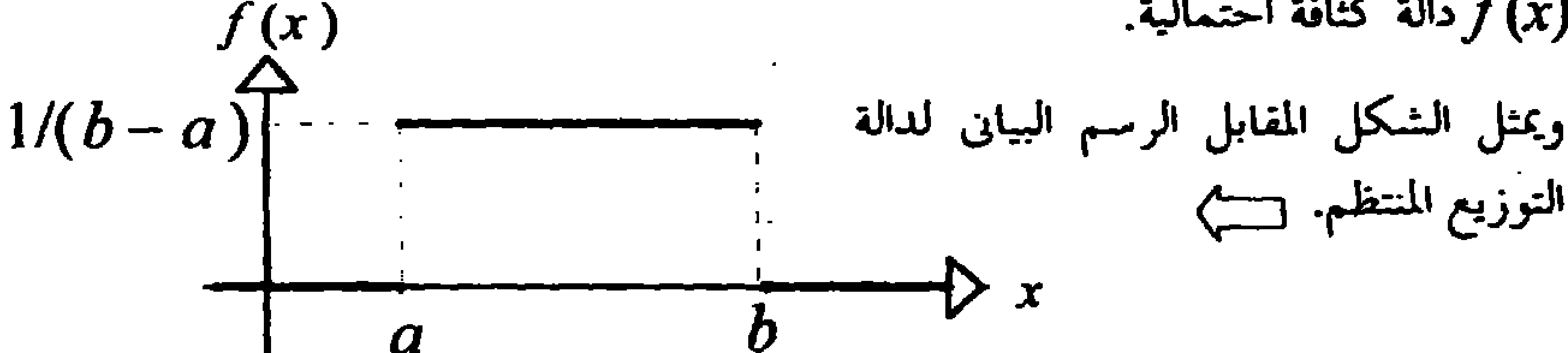
١- التوزيع المنتظم (المستطيل) Uniform (Rectangular) Distribution

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X يتبع توزيعا منتظما على الفترة $[a,b]$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a) & , \quad a\le x\le b \\ 0 & , \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من الواضح أن $f(x)\ge 0$ وأن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ ، وبذلك نكون قد تحققنا من أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

ويمثل الشكل المقابل الرسم البيانى لدالة التوزيع المنتظم.

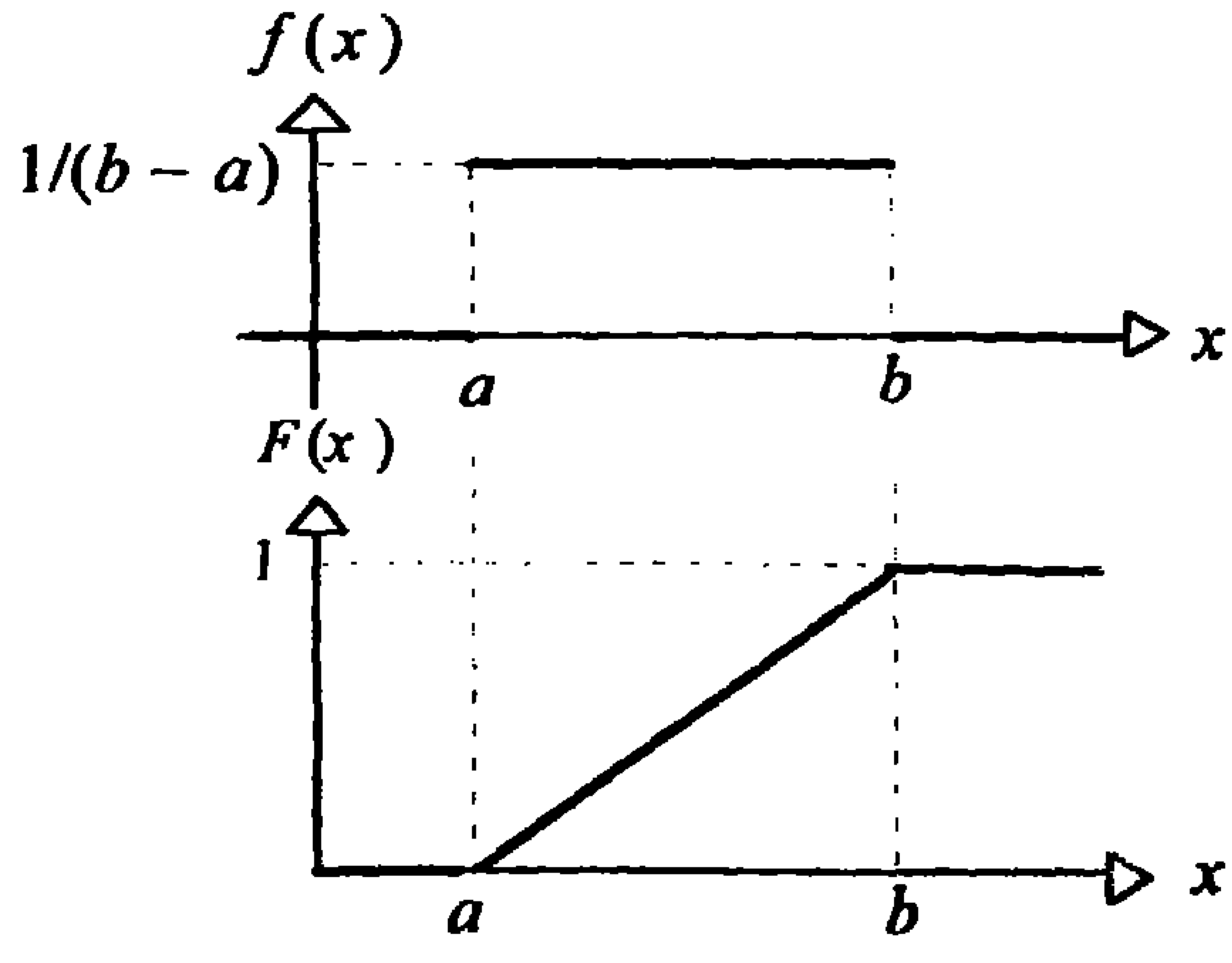


١-١ خواص التوزيع المنتظم

◆ دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المنتظم هى:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a\le x\le b \\ 1 & , \quad x>b \end{cases}$$

ويمثل الشكل الآتى الرسم البيانى لدالة التوزيع المنتظم ودالته التراكمية.



◆ **متوسط التوزيع هو:**

$$\mu = E(X) = \tfrac{1}{2}(a+b)$$

◆ **تباين التوزيع هو:**

$$\sigma^2 = V(X) = \tfrac{1}{12}(b-a)^2$$

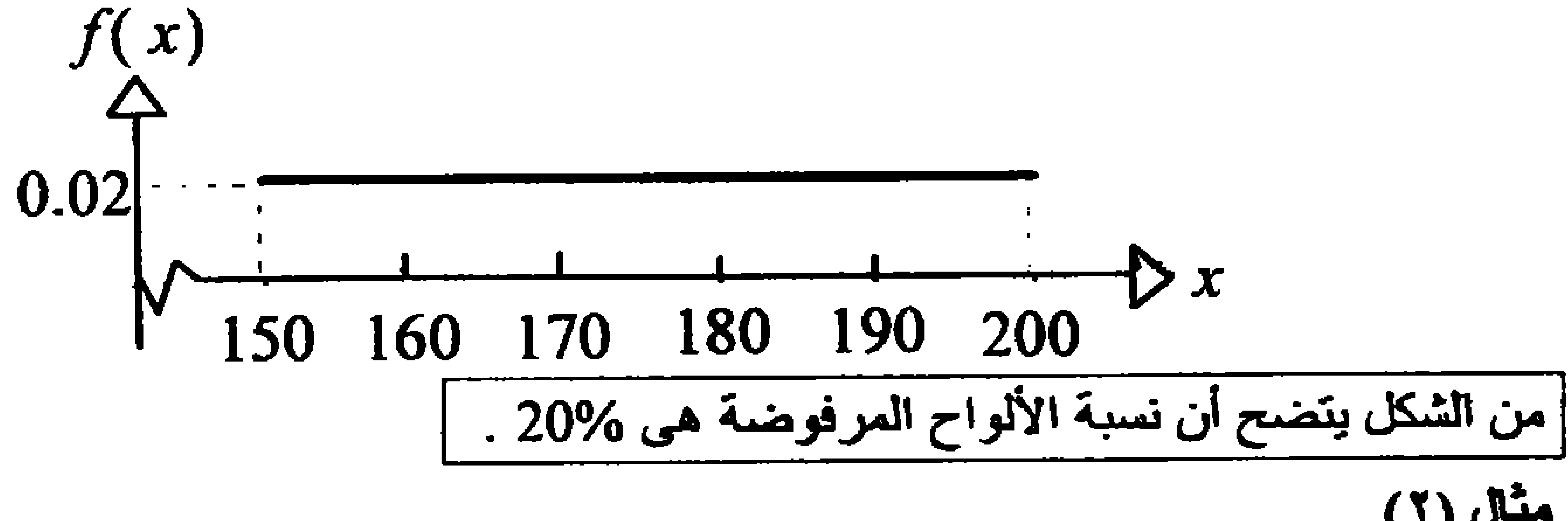
هذا؛ والتوزيع المنتظم هو أبسط توزيع احتمالى متصل ويستخدم عادة كنموذج فى الحالات التى تكون فيها الأحداث متساوية الاحتمال؛ فمثلا الخطأ (بالزيادة أو النقصان) الذى يحدث عند تسجيل القياسات ، حساب احتمال زمن الانتظار وغيرها. والأمثلة الآتية توضح بعض استخدامات هذا التوزيع:

مثال (١)

لنفرض أن قسم البحوث فى مصنع للصلب لديه اعتقاد بأن إحدى ماكينات فرد الصلب تنتج ألواحا ذات سمك متغير يتراوح بين 150 ، 200 ملليمتر. فإذا كانت الألواح التى سمكها أقل من 160 ملليمتر مرفوضة فاحسب نسبة الألواح المرفوضة.

الحـــل

نستخدم التوزيع المنتظم حيث $a = 150$ ، $b = 200$ ، $\frac{1}{b-a} = 0.02$.



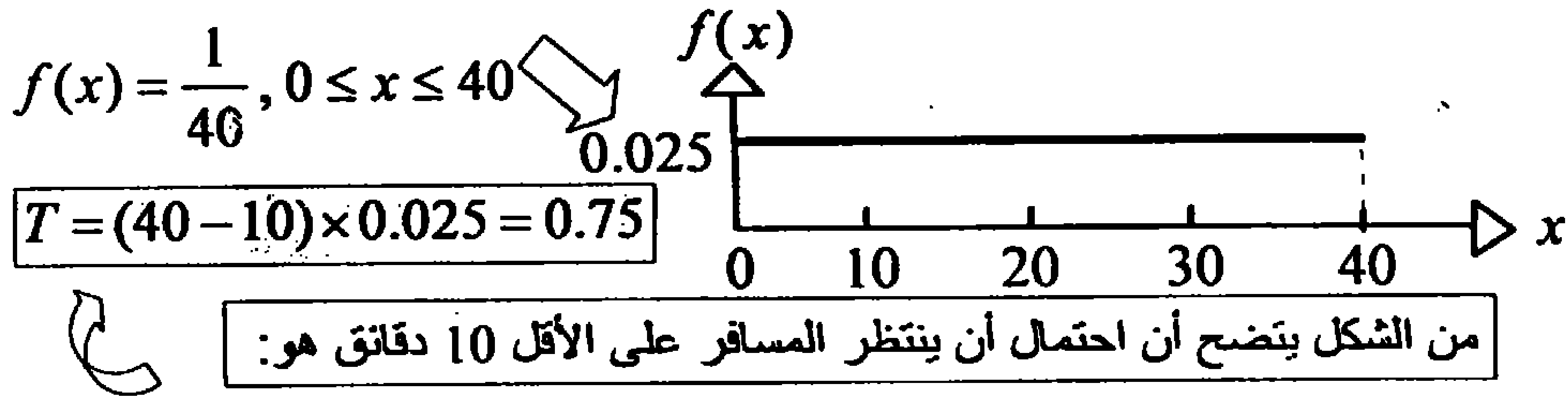
من الشكل يتضح أن نسبة الألواح المرفوضة هى 20% .

مثال (٢)

وصل مسافر إلى محطة قطارات زمن التقاطر فيها ثابت ويساوى 40 دقيقة. ما هو احتمال أن ينتظر المسافر على الأقل 10 دقائق؟

الحـــل

زمن انتظار المسافر يتبع التوزيع المنتظم الذى دالة كثافته الاحتمالية هى:



$$f(x) = \frac{1}{40}, 0 \le x \le 40$$

من الشكل يتضح أن احتمال أن ينتظر المسافر على الأقل 10 دقائق هو:

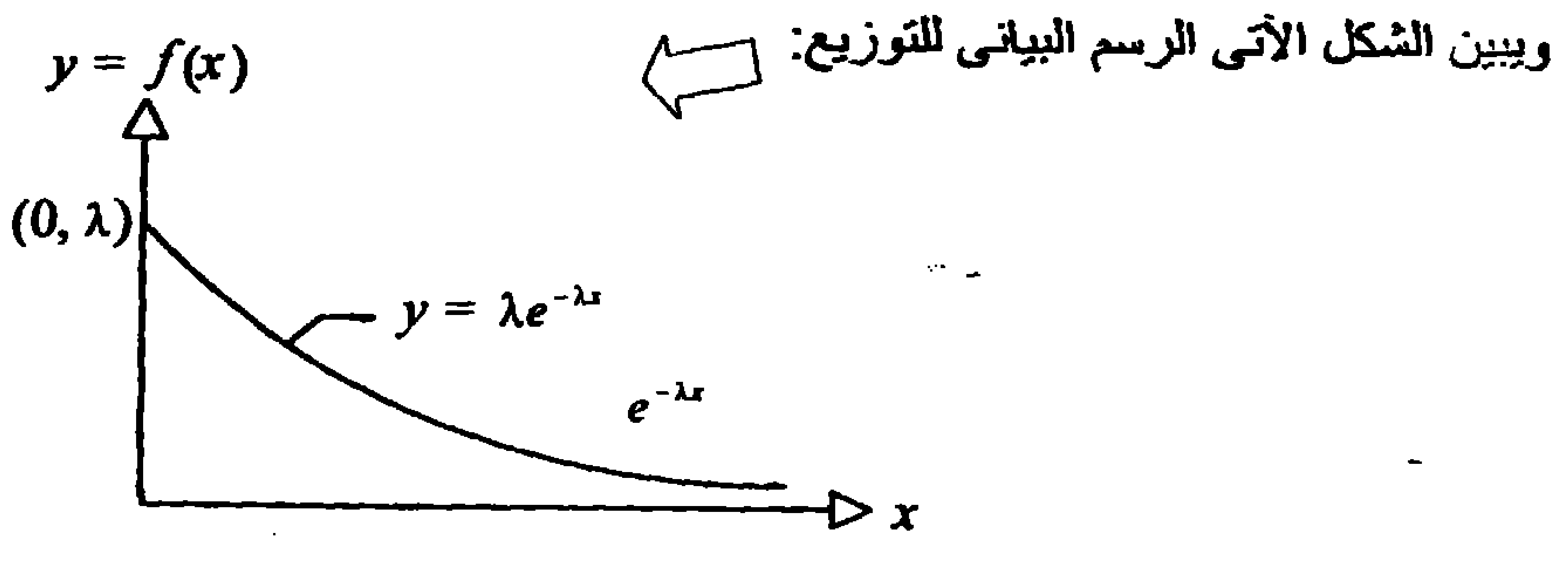
$$T = (40-10) \times 0.025 = 0.75$$

٢- التوزيع الأسى Exponential Distribution

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda > 0$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

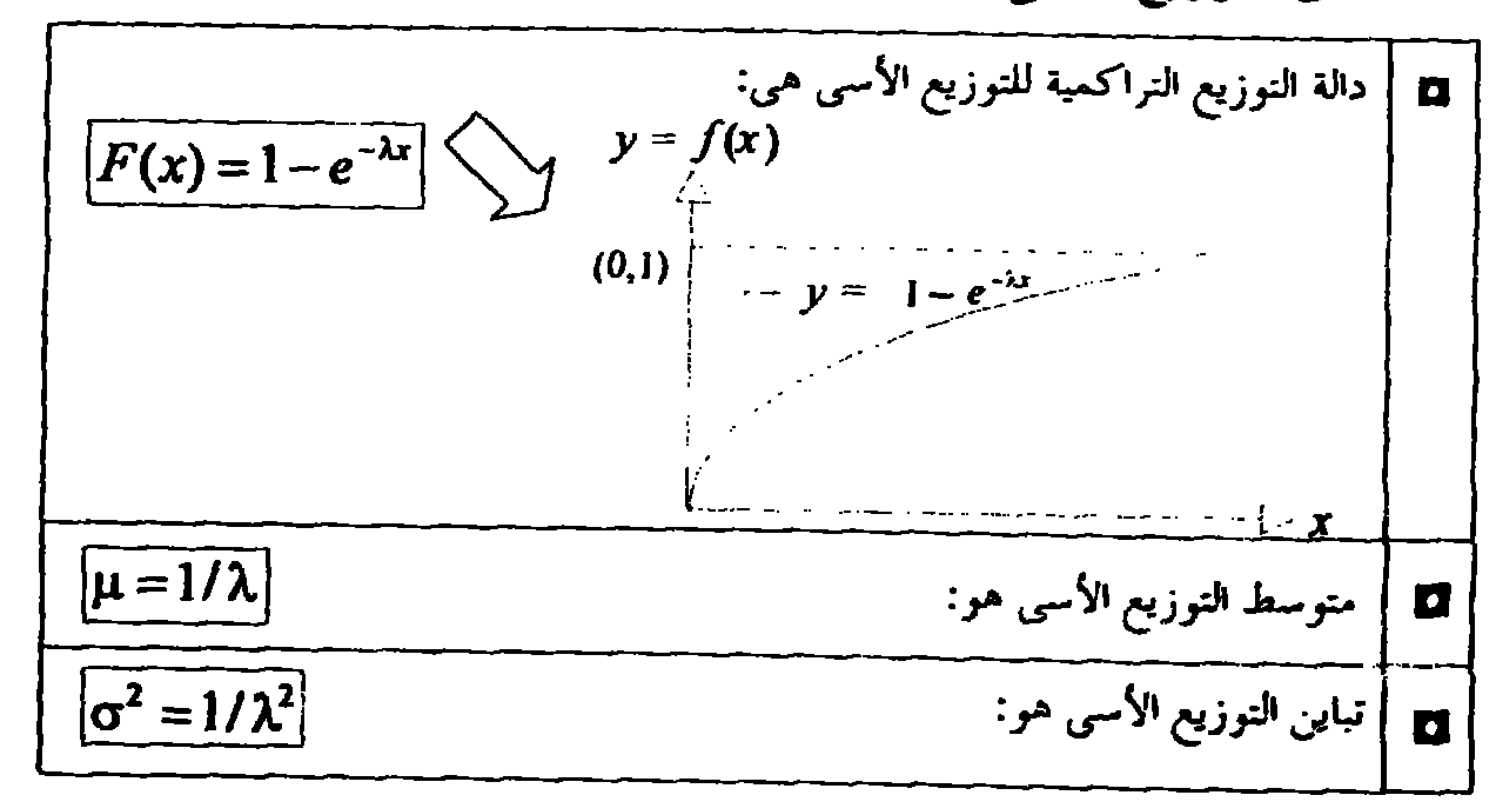
ويبين الشكل الآتى الرسم البيانى للتوزيع:



والآن فإن هذه الدالة تحقق:

١.	لجميع قيم x: $\lambda e^{-\lambda x} > 0$
٢.	$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}dx$ $= \lim_{b\to\infty} \lambda \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big\vert_0^\lambda = -\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda b} + 1 = 1$

٢-١ خصائص التوزيع الأسى



■	دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الأسى هى:	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
■	متوسط التوزيع الأسى هو:	$\mu = 1/\lambda$
■	تباين التوزيع الأسى هو:	$\sigma^2 = 1/\lambda^2$

هذا؛ ويستخدم التوزيع الأسى فى حالات الانتظار بين الأحداث المتتالية حيث تمثل المعلمة λ متوسط عدد مرات الوصول فى وحدة الوقت، وتوضح ذلك الأمثلة الآتية:

مثال (١)

يتبع وصول الطائرات فى مطار ما نموذجا مشابه لدالة الكثافة الاحتمالية الأسية بمتوسط 15 طائرة فى الساعة. أوجد احتمال وصول طائرة فى 6 دقائق.

الحـــل

$$P(t \leq 0.1) = \int_0^{0.1} 15\, e^{-15t} dt = 0.777$$

مثال (٢)

إذا كانت أعمار البطاريات التى تنتجها إحدى الشركات تتبع توزيعا احتماليا أسيا متوسطه 2000 ساعة فأوجد:

(أ) احتمال أن ينتهى عمر البطارية خلال 200 ساعة من الاستعمال.

(ب) احتمال أن تعيش البطارية أكثر من 4,000 ساعة.

الحـــل

$$\mu = 1/\lambda = 2000$$

$$\therefore \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 0.0005 e^{-0.0005x}$$

(أ) احتمال أن ينتهى عمر البطارية خلال 200 ساعة من الاستعمال هو:

$$P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-0.0005 \times 200} = 1 - e^{-0.1} = 0.1$$

(ب) احتمال أن تعيش البطارية أكثر من 4,000 ساعة هو:

$$P(X > 4000) = 1 - P(X \leq 4000) = 1 - F(4000)$$

$$= 1 - (1 - e^{-0.0005 \times 4000})$$

$$= e^{-2} = 0.135$$

٣- التوزيع الطبيعى Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات المتصلة التى لها تطبيقات فى شتى مجالات الحياة منها:

- توزيع الدخول فى شركة ما.
- توزيع درجات الطلاب فى امتحان معين .
- توزيع أطوال (أو أوزان) الطلاب فى إحدى المدارس.

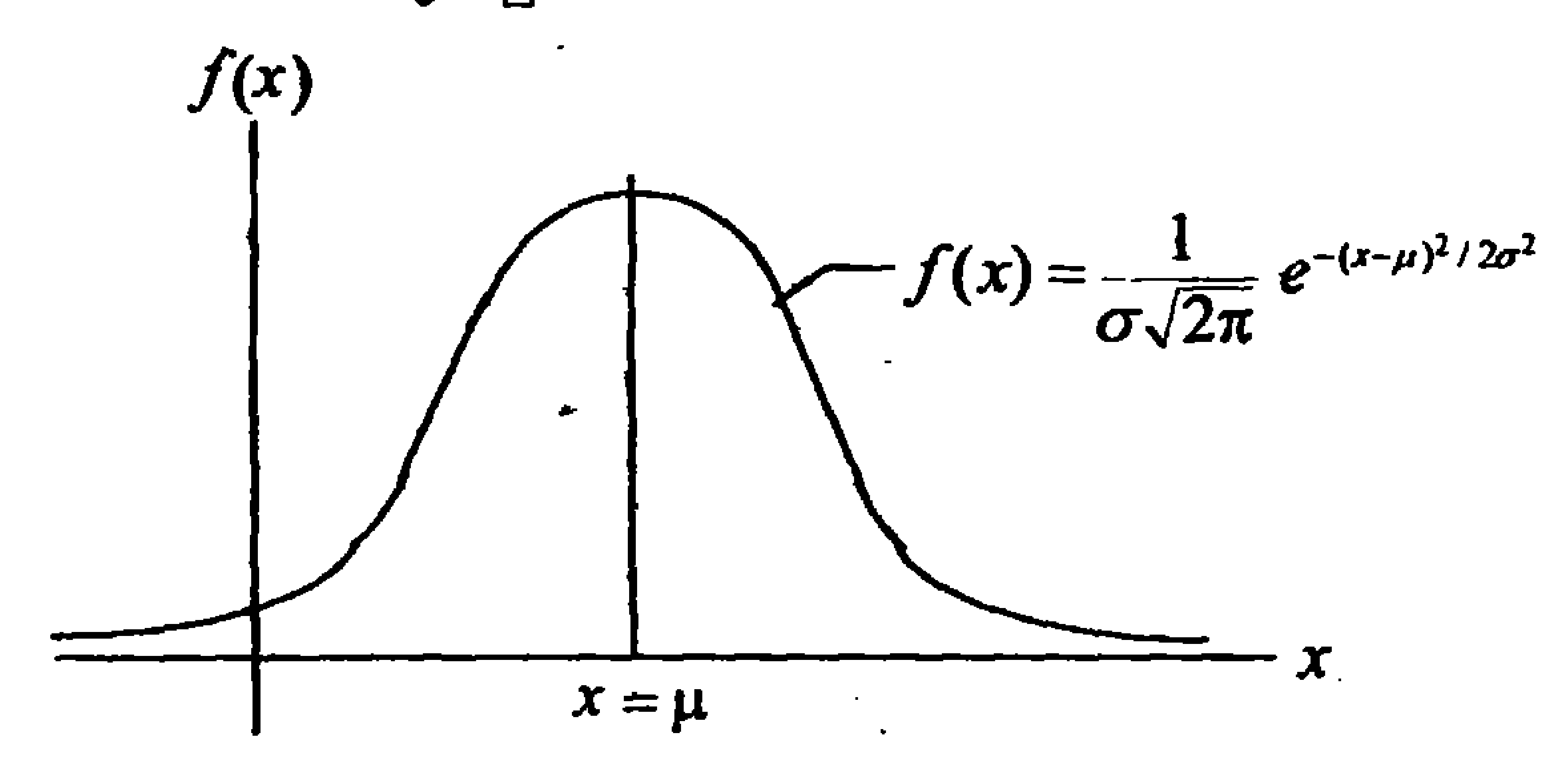
وسنعطى التعريف التالى:

يقال أن متغيرا عشوائيا متصلا X يتبع توزيعا طبيعيا بمعلمتين μ ، σ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\quad,-\infty<x<\infty$$

حيث μ هو المتوسط ، σ هو الانحراف المعيارى.

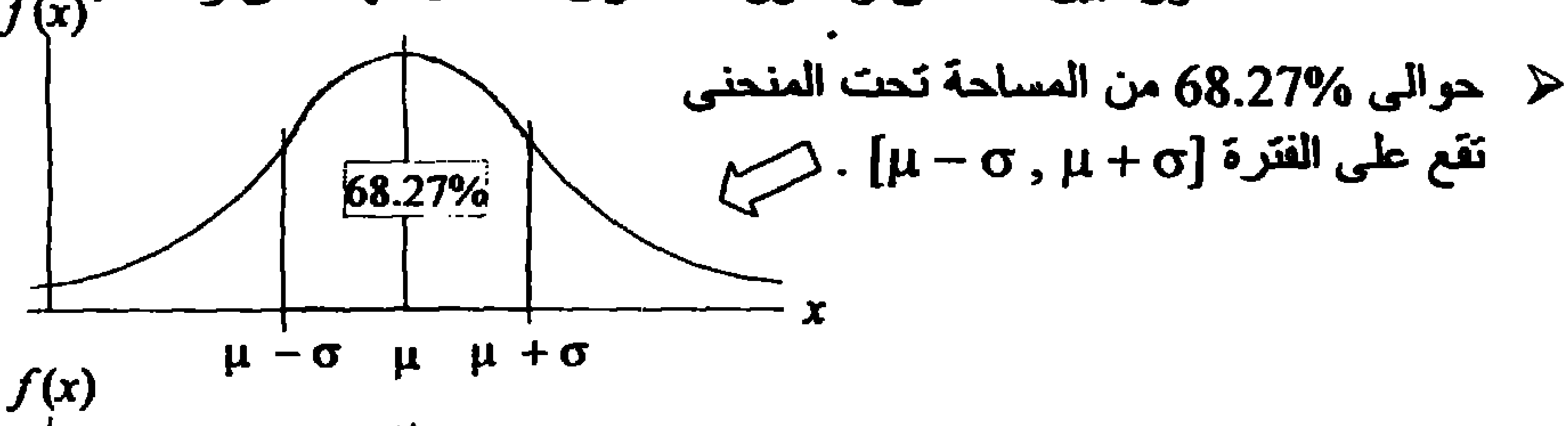
ويبين الشكل الآتى الرسم البيانى للتوزيع الطبيعى.



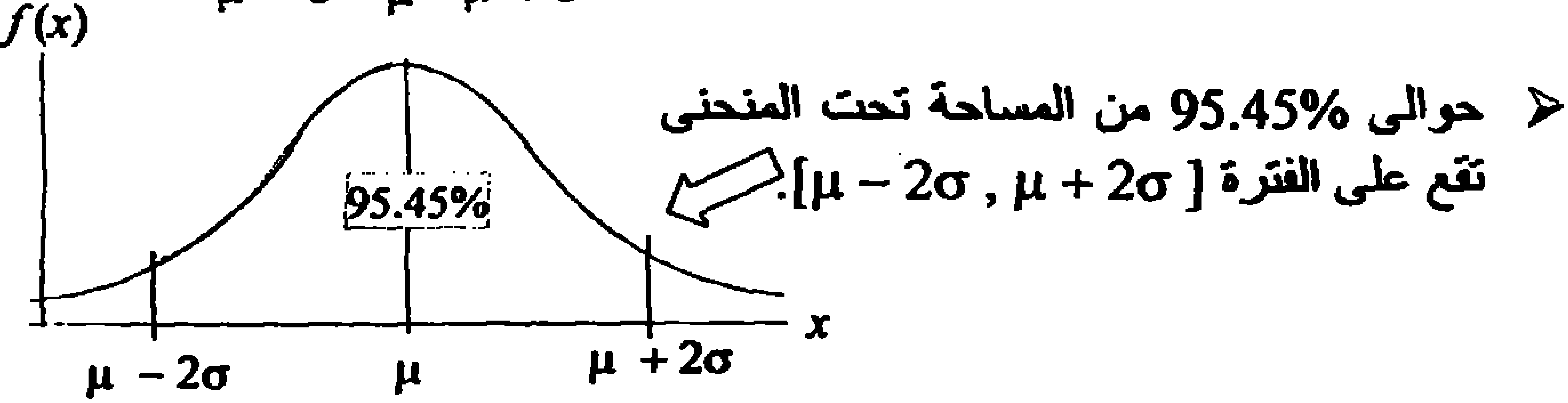
٣-١ خصائص التوزيع الطبيعى

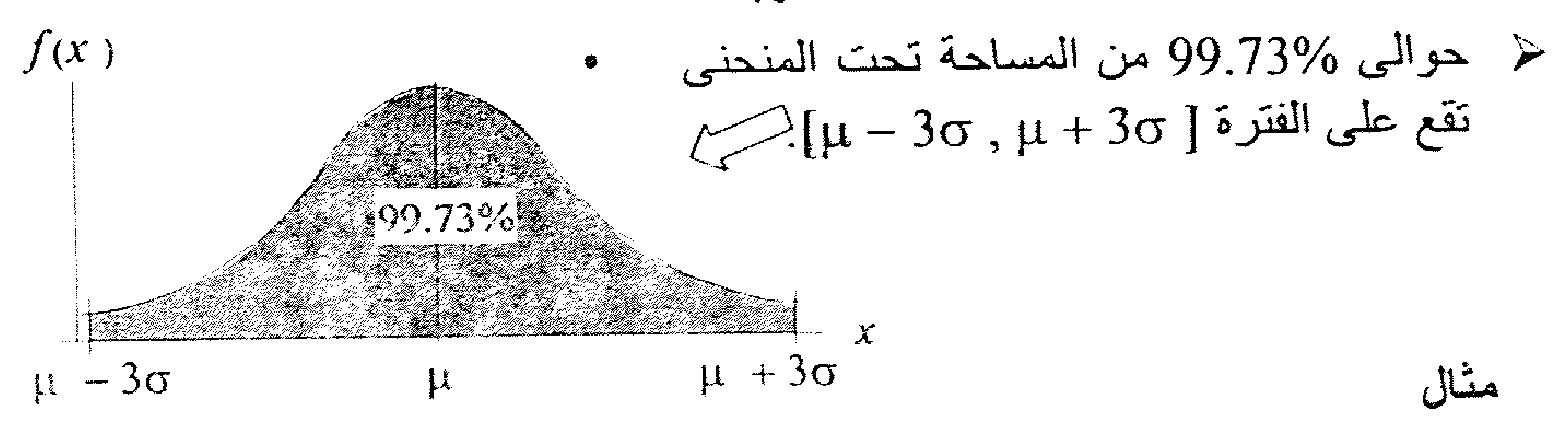
لمنحنى التوزيع الطبيعى الخصائص الآتية:

- المنحنى على شكل جرس ويمتد طرفاه إلى كلى الجهتين إلى ما لانهاية بدون تقاطع مع المحور الأفقى.
- المنحنى متماثل حول المحور $x=\mu$.
- يتساوى المتوسط والوسيط والمنوال.
- المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x تساوى دائما 1 مهما كان وضعه.
- حوالى 68.27% من المساحة تحت المنحنى تقع على الفترة $[\mu-\sigma\,,\,\mu+\sigma]$.



- حوالى 95.45% من المساحة تحت المنحنى تقع على الفترة $[\mu-2\sigma\,,\,\mu+2\sigma]$.





- حوالى 99.73% من المساحة تحت المنحنى تقع على الفترة $[\mu - 3\sigma , \mu + 3\sigma]$

مثال

فى مدرسة ثانوية كان متوسط درجات اختبار الذكاء (*IQ score*) على عينة من 1200 تلميذ يساوى 100 بانحراف معيارى 15. فإذا علمت أن اختبار الذكاء يتبع التوزيع الطبيعى أوجد:

(أ) عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 85 ، 115.

(ب) عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 70 ، 130.

(ج) عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 55 ، 145.

(د) عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن 55 أو تزيد درجاتهم عن 145.

(هـ) عدد التلاميذ الذين تفوق درجاتهم 145.

الحل

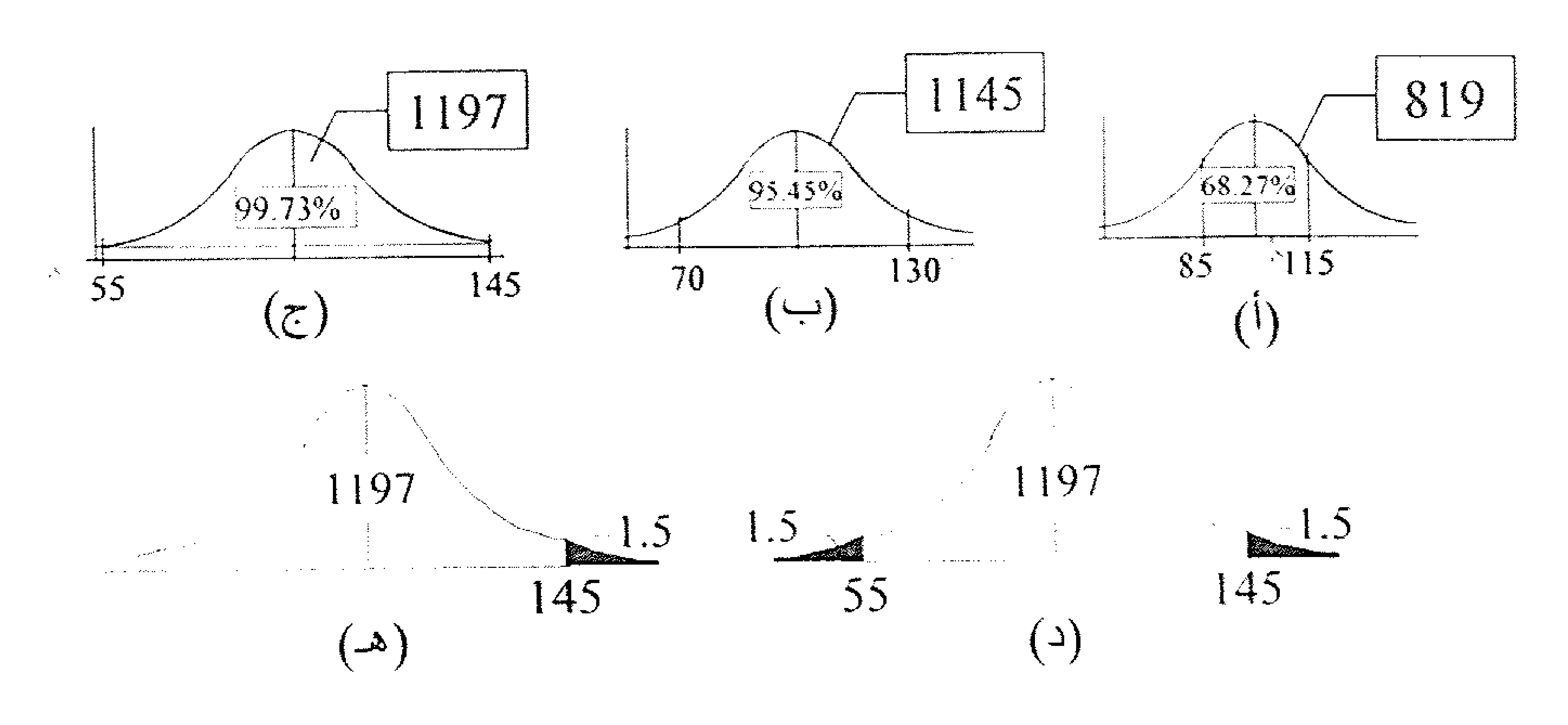
(أ) حيث أن $100 - 15 = 85$ ، $100 + 15 = 115$، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 85 ، 115 يساوى $(1200)(0.6827)$أى 819.

(ب) حيث أن $100 - 30 = 70$ ، $100 + 30 = 130$، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 70 ، 130 يساوى $(1200)(0.9545)$أى 1145.

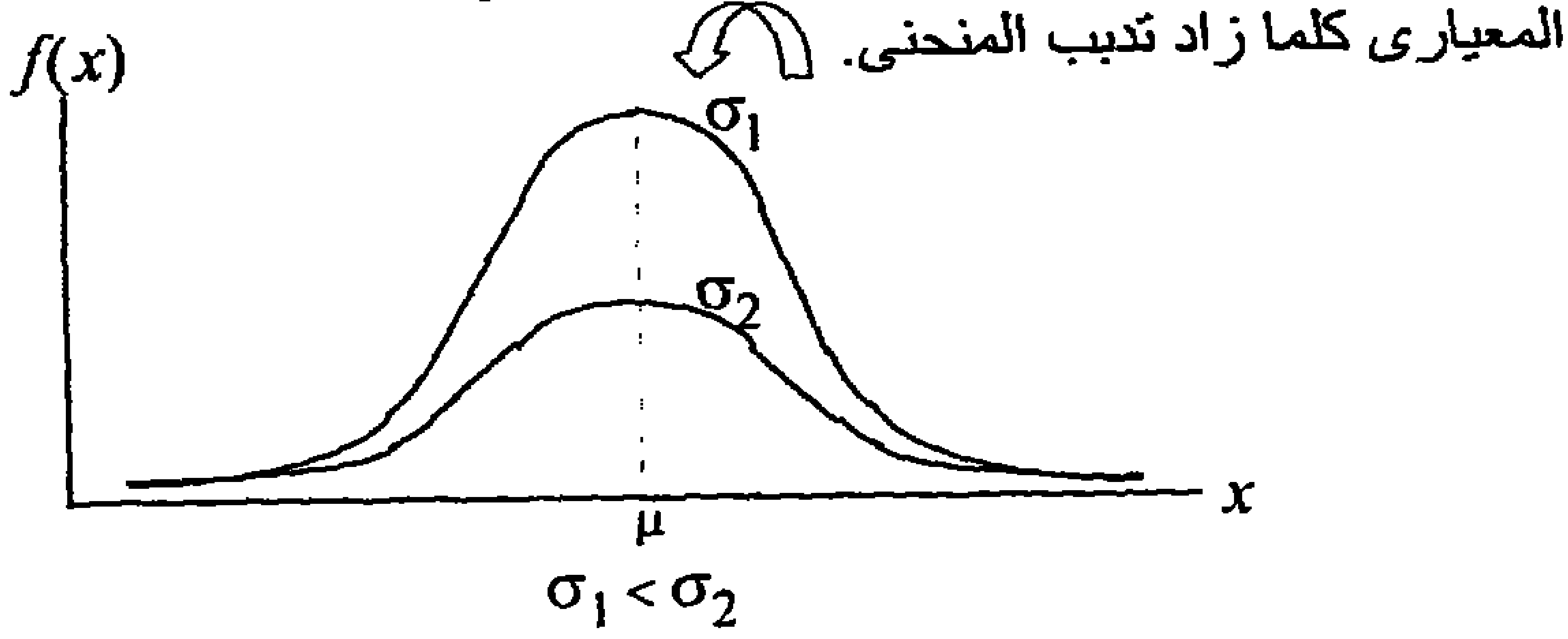
(ج) حيث أن $100 - 45 = 55$ ، $100 + 45 = 145$، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 55 ، 145 يساوى $(1200)(0.9973)$أى 1197.

(د) عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن 55 أو تزيد درجاتهم عن 145يساوى $1200 - 1197$أى ثلاثة تلاميذ.

(هـ) عدد التلاميذ الذين تفوق درجاتهم 145يساوى تلميذ أو اثنين.



- كلما زاد الانحراف المعيارى s كلما زاد تفلطح المنحنى وكلما قل الانحراف المعيارى كلما زاد تدبب المنحنى.



- القيمة المتوقعة للتوزيع الطبيعى هى μ .
- تباين التوزيع الطبيعى هو σ^2 .
- دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الطبيعى هى:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

ويتم حسابها باستخدام جداول خاصة.

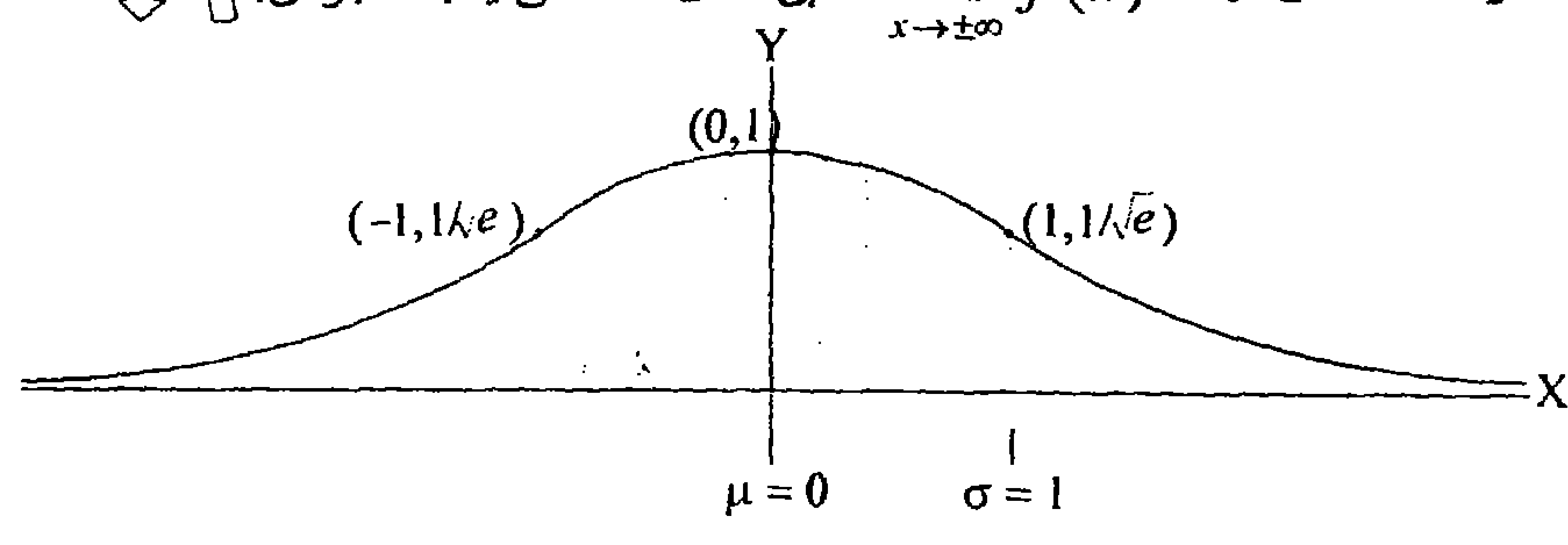
٢-٢ التوزيع الطبيعى المعيارى Standard Normal Distribution

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى المعيارى هى:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

وفى هذا التوزيع فإن المتوسط يساوى 0 والانحراف المعيارى يساوى 1 .

وبرسم هذه الدالة بعد تعيين قيمتها عند $x = 0$ ونقطتى الانقلاب $(\pm 1, 1/\sqrt{e})$ وملاحظة أن $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ فإن شكل المنحنى يشبه الجرس.



وقد تم حساب المساحات المختلفة فى الفترات $[0,x]$ حيث $0 < x$ على شكل جداول.
ومن تماثل المنحنى حول محور Y يمكن حساب أى مساحة.

مثال (١)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد $P(0 \le X \le 1.54)$

الحــــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى:

والشكل الآتى يبين الحساب من الجدول:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$$\therefore \quad P(0 \le X \le 1.54) = 0.4382$$

مثال (٢)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد:

$P(X \ge 1.25)$

الحــــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3642	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177

$$\therefore \quad P(X \ge 1.25) = 0.5000 - 0.3944 = 0.1056$$

ويمكننا استخدام حدول التوزيع الطبيعى لمساحات الذيل مباشرة كالآتى:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

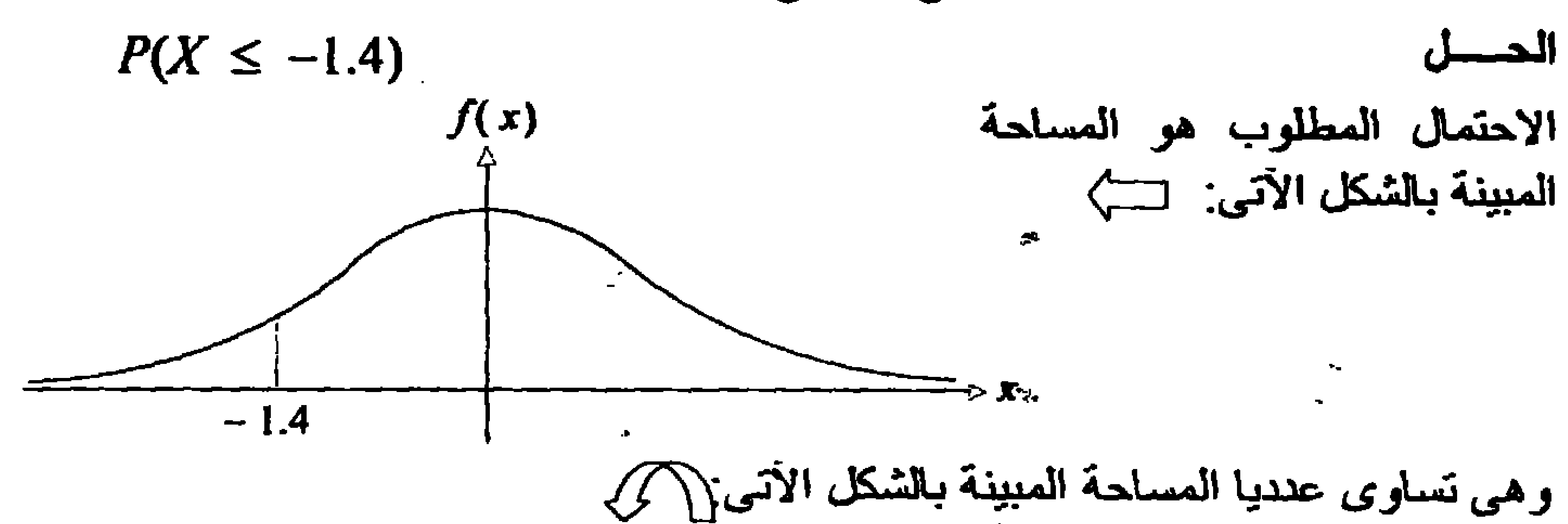
مثال (٣)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد:

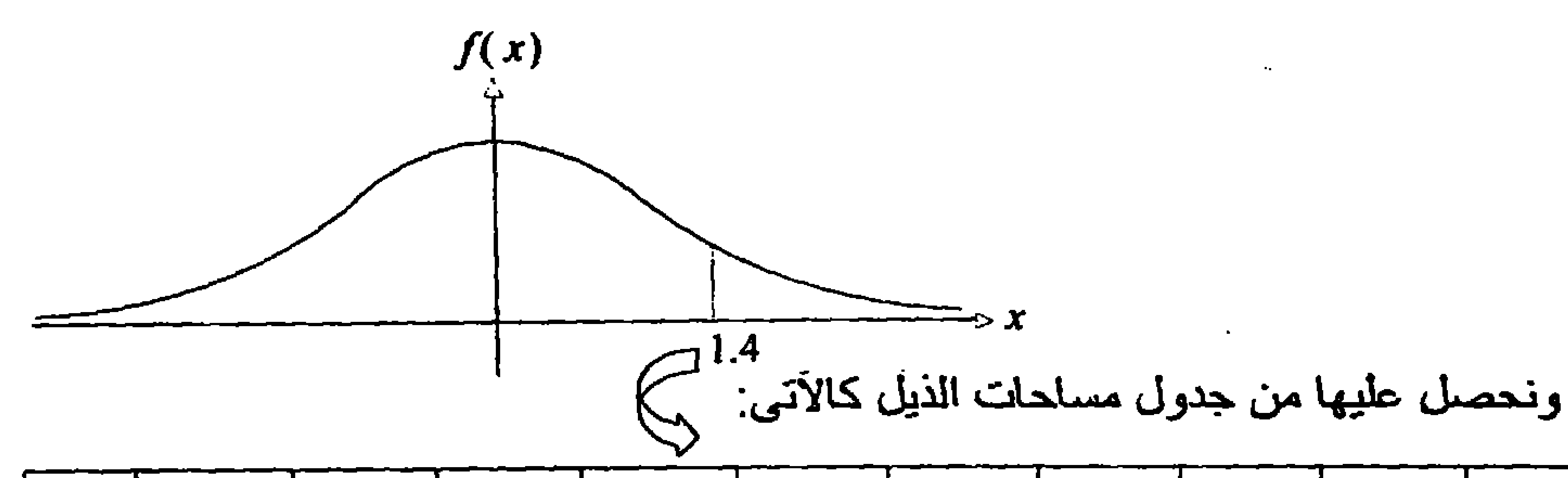
$P(X \leq -1.4)$

الحــــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى:



وهى تساوى عدديا المساحة المبينة بالشكل الآتى:



ونحصل عليها من جدول مساحات الذيل كالآتى:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

$\therefore \quad P(X \leq 1.4) = 0.0808$

مثال (٤)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد:

$$P(-1.9 \le X \le -1.5)$$

الحـــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى:

وهى تساوى عدديا المساحة اليمنى بنفس الشكل.

ونحصل عليها من الجدول كالآتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	04772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

$$\therefore \quad P(-1.9 \le X \le -1.5) = 0.4713 - 0.4332 = 0.0381$$

مثال (٥)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد:

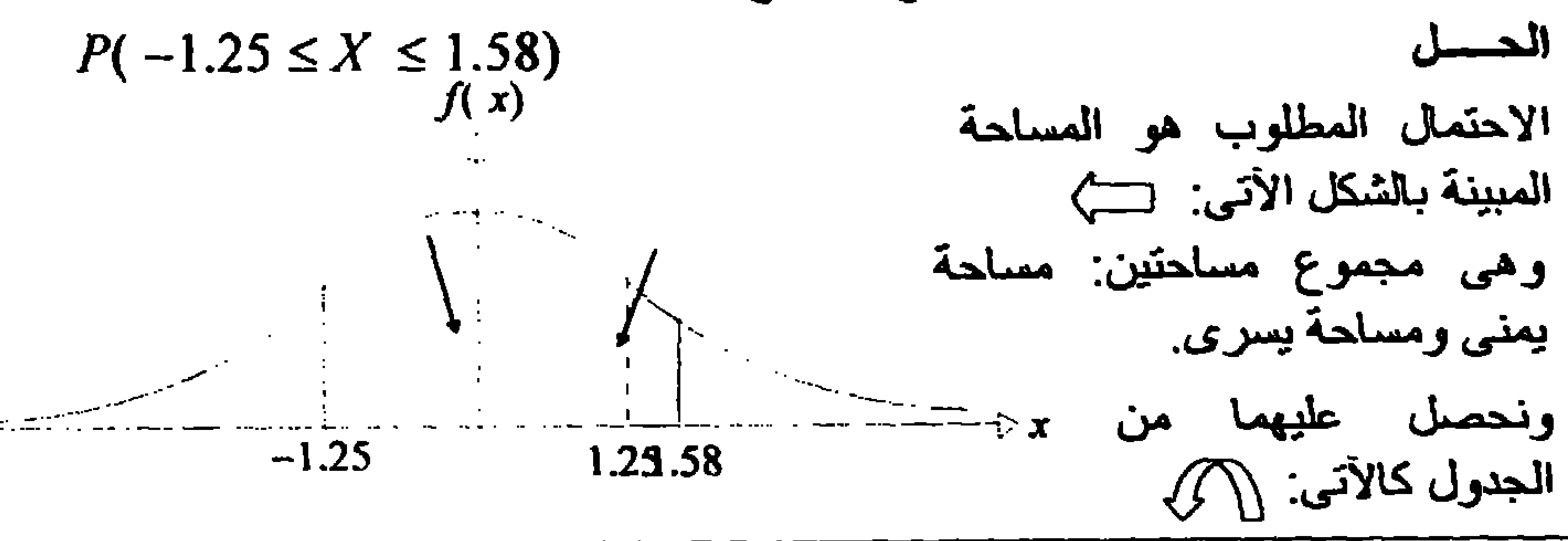
$$P(-1.25 \le X \le 1.58)$$

الحـــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى:

وهى مجموع مساحتين: مساحة يمنى ومساحة يسرى.

ونحصل عليهما من الجدول كالآتى:



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545

$$\therefore \quad P(-1.25 \le X \le 1.58) = 0.3944 + 0.4429 = 0.8373$$

مثال (٦)

إذا كان X متغيرا عشوانيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى فأوجد $P(X \geq -1.45)$

الحـــل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتى: ⇦
وهى مجموع مساحتين: مساحة يمنى تساوى 0.5 ومساحة يسرى نحصل عليها من الجدول كالآتى:

$f(x)$

-1.45 x

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$\therefore \quad P(-1.45 \leq X) = 0.4265 + 0.5000 = 0.9265$

وكما أمكننا حساب قيمة الاحتمال إذا عرفنا الفترة، فبالعكس يمكن حساب نهاية (أو بداية) الفترة إذا علمت قيمة الاحتمال. ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال (١)

إذا كان X متغيرا عشوانيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى وكانت:

$$P(-k \leq X \leq k) = 0.9030$$

فأوجد قيمة k.

الحـــل

$$P(-k \leq X \leq k) = 2\,P(0 \leq X \leq k)$$

$$\therefore \quad P(0 \leq X \leq k) = 1/2 \times 0.9030 = 0.4515$$

نبحث فى الجدول عن القيمة 0.4515 أو أقرب منها كالآتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$\therefore \quad k = 1.66$

مثال (٢)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى وكانت:

$$P(-2 \le X \le k) = 0.9692$$

فأوجد قيمة k.

الحـــل

$$P(-2 \le X \le k) = P(-2 \le X \le 0) + P(0 \le X \le k)$$
$$= P(0 \le X \le 2) + P(0 \le X \le k)$$

$$\therefore \quad P(0 \le X \le k) = P(-2 \le X \le k) - P(0 \le X \le 2)$$
$$= 0.9692 - 0.4772 = 0.4920$$

z	0.00	0.01	0.02
1.9	0.4713	0.4719	0.4726
2.0	04772	0.4778	0.4783

نبحث فى الجدول عن القيمة 0.4920 أو أقرب منها كالآتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	04861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	~~0.4918~~	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952

$$\therefore \quad k = 2.41$$

مثال (٣)

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى وكانت:

$$P(X \ge k) = 0.1170$$

فأوجد قيمة k.

الحـــل

$$P(X \ge k) = 0.5 - P(0 \le X \le k)$$

$$\therefore \quad 0.1170 = 0.5 - P(0 \le X \le k)$$

$$\therefore \quad P(0 \le X \le k) = 0.5000 - 0.1170 = 0.3830$$

نبحث فى الجدول عن القيمة 0.3830 أو أقرب منها كالآتى:

z	.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.1	~~0.3642~~	~~0.3665~~	~~0.3686~~	~~0.3708~~	~~0.3729~~	~~0.3749~~	~~0.3770~~	~~0.3790~~	~~0.3810~~	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177

$$\therefore \quad k = 1.19$$

ويمكن الحصول على تلك النتيجة مباشرة من جدول مساحات الذيل كالآتى:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	~~0.1357~~	~~0.1335~~	~~0.1314~~	~~0.1292~~	~~0.1271~~	~~0.1251~~	~~0.1230~~	~~0.1210~~	~~0.1190~~	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985

٢-٣ التحويل إلى التوزيع الطبيعى المعيارى

فى كثير من التطبيقات يكون التوزيع الإحصائى طبيعيا ولكنه غير معيارى؛ فمثلا يوجد هذا التوزيع فى عدة حالات منها رصد درجات الطلاب وقياس أطوالهم وأوزانهم. ويشبه هذا التوزيع المعيارى إلا أن به زحزحة (يمينا أو يسارا) بمقدار μ وبتغيير مقياس الرسم بمقدار σ.

ولحساب احتمال وقوع المتغير العشوائى X فى أى فترة $[a,b]$ فإننا نحول التوزيع إلى توزيع معيارى بإجراء التحويل الآتى:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

حيث μ هو المتوسط الحسابى ، σ الانحراف المعيارى. وعلى ذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية تصبح هى دالة التوزيع الطبيعى المعيارى.

مثال (١)

إذا كان X متغير عشوائى متوسطه الحسابى 50وانحرافه المعيارى 10 فأوجد كلا من $P(X \geq 80)$ ، $P(62 \leq X \leq 70)$.

الحـــل

بوضع $Z = \frac{X-50}{10}$ فإن:

$$P(X \leq 80) = P\left(Z \leq \tfrac{80-50}{10}\right) = P(Z \leq 3)$$
$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 3) = 0.5 + 0.4987 = 0.9987$$

مثال (٢)

إذا كانت أوزان طلاب أحد المدارس تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابى هو 65 وتباينه 12 واختير طالب عشوائيا من بين هؤلاء الطلاب فاحسب احتمال أن يكون وزنه:

(أ) أكبر من 80 كجم. (ب) أقل من 60 كجم. (ج) ينحصر بين 60 كجم ، 70 كجم.

الحـــل

(أ)

$$X = 80 \Rightarrow Z = \frac{80-65}{12} = 1.25$$
$$P(Z \geq 1.25) = 0.5 - P(0 \leq Z \geq 1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

(ب)

$$X = 60 \Rightarrow Z = \frac{60-65}{12} = -0.4167$$
$$P(Z < -0.4167) = 0.5 - P(0 < Z < 0.4167) = 0.5 - 0.1628 = 0.3372$$

(ج)

$$X = 70 \Rightarrow Z = \frac{70-65}{12} = 0.4167$$
$$P(-0.4167 \leq Z \leq 0.4167) = 2P(0 < Z < 0.4167)$$
$$= 2 \times 0.1628 = 0.3256$$

مثال (٣)

إذا كان الوقت اللازم لهضم وحدة واحدة من طعام معين يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط حسابى قدره 35 دقيقة وانحراف معيارى قدره 4 دقائق فأوجد:

(أ) احتمال أن تهضم وحدة طعام فى أقل من 40 دقيقة.

(ب) احتمال أن تهضم وحدة طعام فى أكثر من 28 دقيقة.

الحـــل

(أ)

$$X = 40 \Rightarrow Z = \frac{40-35}{4} = 1.25$$

$$P(Z < 1.25) = 0.5 + P(0 \le Z < 1.25)$$

$$= 0.5 + 0.3944 = 0.8944$$

(ب)

$$X = 28 \Rightarrow Z = \frac{28-35}{4} = -1.75$$

$$P(Z > -1.75) = 0.5 + P(0 \le Z < 1.75)$$

$$= 0.5 + 0.4599 = 0.9599$$

٢-٤ التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين

إذا كان حجم العينة n فى توزيع ذى الحدين صغير نسبيا فإنه يسهل حساب الاحتمالات المختلفة بسهولة باستخدام الصيغة:

$$b(n,k;p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

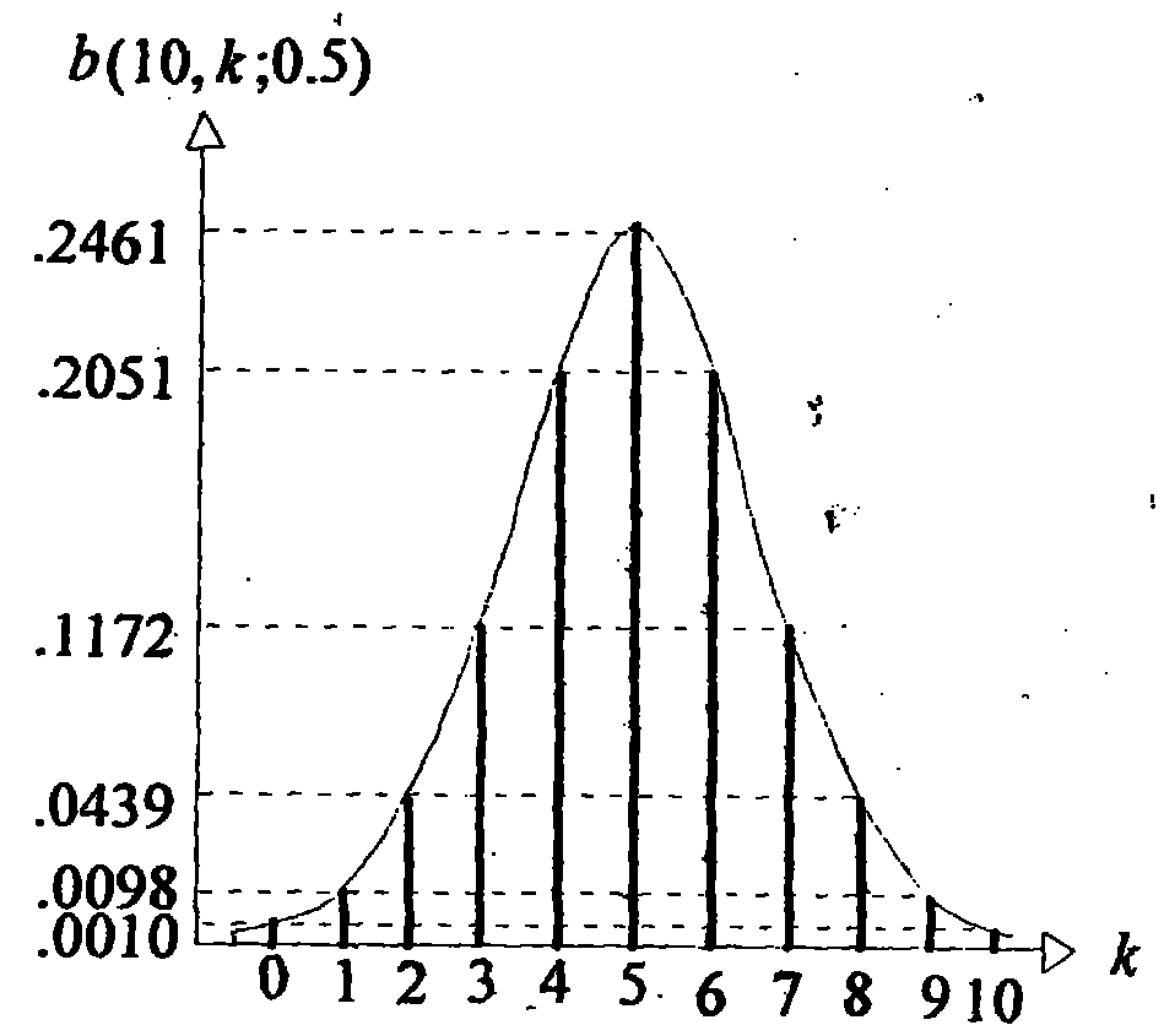
ولكن إذا كانت n كبيرة نسبيا فيصعب استخدام تلك الصيغة، وفى هذه الحالة يمكن أن نستخدم التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين خاصة عندما تقترب قيمة المعلمة p من 0.5. أما إذا كانت p صغيرة فلكى نستخدم توزيع ذى الحدين فإن n يجب أن تكون كبيرة كبيرا كافيا بحيث يظل حاصل الضرب np متوسطا فى قيمته.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة سوية 10 مرات فإن احتمال أن نحصل على صورة k من المرات يساوى $b(10,k;0.5)$ ويبين الجدول المقابل قيم هذا الاحتمال. ⇦

k	$b(10, k;0.5)$
0	.0010
1	.0098
2	.0439
3	.1172
4	.2051
5	.2461
6	.2051
7	.1172
8	.0439
9	.0098
10	.0010

كما يبين الشكل الآتى رسما بيانيا للتوزيع الاحتمالى.



من الشكل نرى أن المنحنى هو المنحنى الطبيعى بكل صفاته حيث المتوسط μ يساوى 5 والإنحراف المعيارى σ يساوى أى 1.58.

مثال (٢)

ينتج مصنع لأقلام الرصاص 60,000 قلما فى اليوم، وقد بينت دراسات الجودة أن 4% من الأقلام معيب. إذا اختبرت عينة من 500 قلم من الإنتاج اليومى فما هو احتمال أن يوجد فى العينة من 12 قلم إلى 24 قلم معيب؟ وما احتمال أن يوجد بالعينة 32 قلم معيب على الأقل؟

الحـــل

حيث أن كبير نسبيا، إذن يمكننا استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين. متوسط التوزيع هو:

$$\mu = np = 500 \times 0.04 = 20$$

وانحرافه المعيارى هو:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0.04 \times 0.96} = 4.38$$

لنفرض أن المتغير العشوائى X يعبر عن عدد الأقلام المعيبة. إذن فالمراد أن نوجد $P(12 \le X \le 24)$ ، $P(X \ge 32)$.

لنأخذ Z ليكون المتغير العشوائى المعيارى المناظر لـ X. إذن:

$$X = 12 \Rightarrow Z = \frac{12-20}{4.38} = -1.83$$
$$X = 24 \Rightarrow Z = \frac{24-20}{4.38} = 0.91$$
$$X = 32 \Rightarrow Z = \frac{32-20}{4.38} = 2.74$$

ويكون المطلوب هو إيجاد $P(-1.83 \le Z \le 0.91)$ ، $P(Z \ge 2.74)$.

من الجداول نجد أن:

$$P(-1.83 \le Z \le 0.91) = 0.4664 + 0.3186 = 0.785$$
$$P(X \ge 32) = 0.5 - 0.4969 = 0.0031$$

إذن:

احتمال أن يوجد في العينة من 12 قلم إلى 24 قلم معيب يساوى 0.785 ، احتمال أن يوجد بالعينة 32 قلم معيب على الأقل يساوى 0.0031.

مثال (٣)

في مدينة من المدن وجد في المتوسط أن شخص واحد بين كل 80 شخص فصيلة دمه X. إذا أخذنا عينة عشوائية من 200 شخص للتطوع بالدم فما هو احتمال أن نجد بينهم 5 أشخاص على الأقل فصيلة دمهم X؟ كم متطوع يلزم أخذهم ليكون احتمال وجود واحد منهم فصيلة دمه X يساوى 0.9 على الأقل؟

الحـــل

$$\mu = np = 200 \times \tfrac{1}{80} = 2.5$$
$$\sigma^2 = npq = 2.5 \times (1 - \tfrac{1}{80}) = 2.5 \times (1 - 0.0125)$$
$$= 2.5 \times 0.9875 = 2.46875$$
$$\sigma = \sqrt{2.46875} = 1.57$$
$$Z_{X=5} = \frac{5-2.5}{1.57} = 1.59$$
$$P(X \ge 5) = P(Z \ge 1.59) = 0.0582$$

تمـــــــرين ٧(أ)

اختير عدد x عشوائيا من الفترة $[0,5]$. فإذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائى الذى يعبر عن العدد هى $f(x)=1/5 \;,\; 0 \le x \le 5$ فأوجد احتمال أن العدد المختار يقع فى الفترة $[1,3]$.

X متغير عشوائى متصل يتبع توزيعا منتظما فى الفترة $[20,50]$.

(أ) ارسم منحنى كل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية.

(ب) احسب المتوسط والانحراف المعيارى لـــ X.

(ج) أوجد $P(30 \le X \le 40)$ ، $P(X \ge 50)$ ، $P(X \le 30)$.

تعلن إحدى شركات الخدمات البريدية أن زمن أداء الخدمة X لأى طلب يتبع توزيعا منتظما ما بين 14 ، 20 يوما.

(أ) ارسم منحنى كل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية.

(ب) احسب المتوسط والانحراف المعيارى لـــ X.

(ج) ما احتمال أن تتم خدمة طلب ما فى خلال المدة بين 15 إلى 18 يوما؟ فى خلال 16 يوما أو أقل؟ فى خلال 16 يوما على الأقل؟

٤. X متغير عشوائى متصل يتبع توزيعا أسيا بمعلمة $\lambda = 3$. أوجد:

(أ) $P(X > 2)$ (ب) $P(X > 1.5)$ (ج) $P(X < 3)$

٥. الوقت ما بين المكالمات الهاتفية التى ترد إلى فندق من الفنادق يتبع توزيعا أسيا بمعلمة $\lambda =$ 0.5 . ما هو احتمال أن تمر 6 دقائق على الأقل بين مكالمتين؟

٦. الطلب على صنف من الأصناف بمخازن شركة خلال أسبوع يتبع توزيعا دالة كثافته الاحتمالية $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$. أوجد:

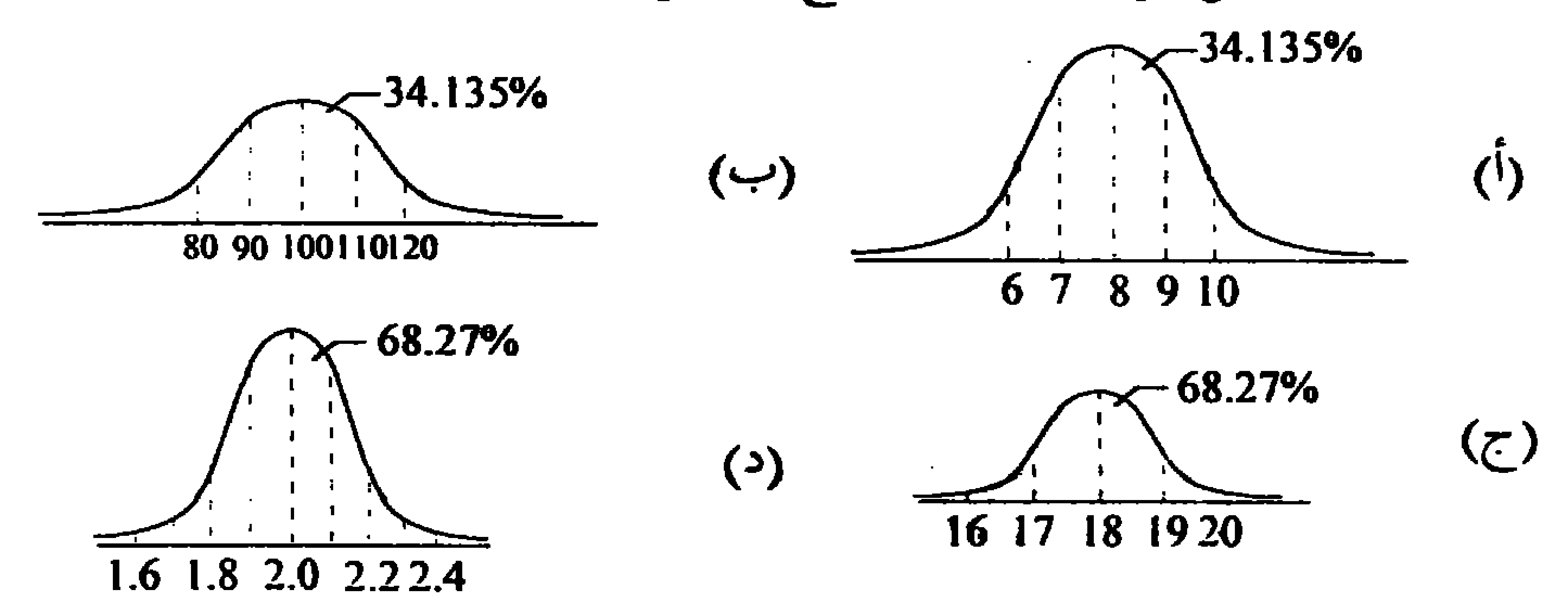
(أ) احتمال الطلب لأقل من 5 وحدات من الصنف.

(ب) احتمال الطلب لأقل من 100 وحدة من الصنف.

(ج) احتمال الطلب لأكثر من 10 وحدات من الصنف.

تمـــــــرين ٧(ب)

١. أوجد μ ، σ لكل من منحنيات التوزيع الطبيعى الآتية:



٢. لدينا توزيع طبيعى متوسطه يساوى 13.1 وانحرافه المعيارى يساوى 5.1. أوجد قيم المتغير العشوائى المعيارى Z المقابل للقيم الآتية:

8, 9, 15, 16, 22, 23, 25

٣. لدينا توزيع طبيعى متوسطه يساوى 15.2 وانحرافه المعيارى يساوى 9.3. أوجد قيم المتغير العشوائى المعيارى Z المقابل للقيم الآتية:

7, 9, 13, 15, 29, 37, 41

٤. يُقَيِّم أستاذ جامعى تقديرات طلابه فى الامتحان حسب القاعدة الآتية:

تقدير ممتاز لمن يحصل على درجة أكبر من $\mu + 1.6\,\sigma$.

تقدير جيد جدا لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu + 0.6\,\sigma$ ، $\mu + 1.6\,\sigma$.

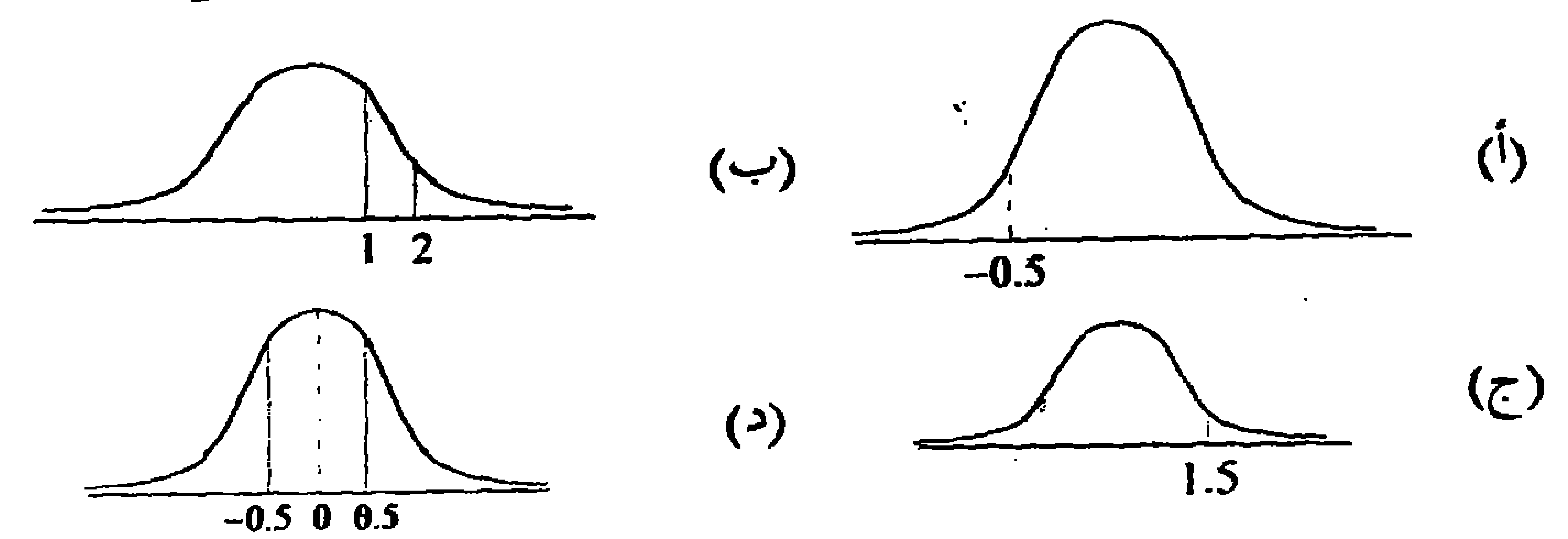
تقدير جيد لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu - 0.3\,\sigma$ ، $\mu + 0.6\,\sigma$.

تقدير مقبول لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu - 1.4\,\sigma$ ، $\mu - 0.3\,\sigma$.

راسب لمن يحصل على درجة أقل من $\mu - 1.4\,\sigma$.

بفرض أن الدرجات تتبع توزيعا طبيعيا أوجد نسبة الحاصلين على كل تقدير.

٦. أوجد كلا من المساحات المبينة بالأشكال الآتية بفرض أن المنحنى هو منحنى طبيعى:



٧. إذا كان المتغير العشوائى Z يتبع التوزيع الطبيعى القياسى أوجد:

(أ) $P(Z < 1.8)$ (ب) $P(Z > -0.5)$ (ج) $P(-0.2 < Z < 0.5)$

٨. إذا كانت أطوال 500 ورقة من أوراق نبات معين تتبع توزيع طبيعى بمتوسط 132 مم وإنحراف معيارى 10 مم ، أوجد عدد الأوراق التالية:

(أ) ما بين 130 مم ، 140 مم.

(ب) أكثر من 150 مم.

(ج) أقل من 130 مم.

٩. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 70 وانحرافه المعيارى 25 فأوجد:

(أ) $P(X > 73)$ (ب) $P(X < 69)$ (ج) $P(X > 90)$

١٠. يبلغ متوسط حياة المصابيح الكهربائية فى أحد المصانع 1300 ساعة بإنحراف معيارى 200 ساعة ، على افتراض أن حياة المصابيح تخضع للتوزيع الطبيعى أوجد إحتمال أن أحد المصابيح يحترق فى أقل من 1100 ساعة.

١١. إذا كانت درجة الحرارة خلال شهر مارس تتبع توزيع طبيعى بتوقع 20^o وإنحراف معيارى 3.33^o. أوجد إحتمال أن تكون درجة الحرارة 21.11^o ، 26.66^o فى

هذا الشهر.

١٢. إذا علم أن مقياس الذكاء X فى مجتمع ما موزع توزيعا طبيعيا ذا متوسط 100 وانحراف معيارى 10 مثل الاحتمالات الآتية بمساحات مظللة تحت منحنى التوزيع الطبيعى:

$P(X \le 75)$ ، $P(105 < X \le 112)$ ، $P(X \ge 120)$.

١٣. إذا كان زمن احتراق صاروخ تجريبى متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 4.3 ثانية وانحرافه المعيارى يساوى 0.04 ثانية فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) أن يحترق الصاروخ فى أقل من 4.25 ثانية.

(ب) أن يحترق الصاروخ فى أكثر من 4.40 ثانية.

(ج) أن يحترق الصاروخ فيما بين 4.30 ، 4.42 ثانية.

١٤. إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة من العام فى بلد ما تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 20° وانحرافه المعيارى 3° فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) ألا تزيد درجة الحرارة عن 23°.

(ب) أن تكون درجة الحرارة بين 26° ، 15°.

(ج) ألا تقل درجة الحرارة عن 20°.

ما هى الدرجة التى تتجاوزها الحرارة بالبلد باحتمال قدره 0.937؟

